This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

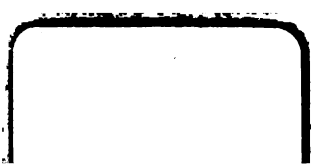
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

3 3433 06907962 6



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Die

Elemente

der

Mathematik

in sechs Büchern

von

Johann Friedrich Lorenz

Erster Theil

die

Arithmetik, Geometrie und Analysis.

Leipzig

im Verlag der J. G. Müllerschen Buchhandlung

1785.

Digitized by Google

319883A

Digitized by Google

Vorrede.

Die Mathematik, welche von jeher die erste unter den Wissenschaften gewesen, und deren Werth zu allen Zeiten anerkannt worden ist, gewährt nicht nur Kenntnisse, die man nicht ohne Nutzen und Vergnügen erlernt, und in denen Niemand, der auf Stand und Erziehung Anspruch macht, ein völliger Fremdling seyn darf; sondern ist auch wegen ihrer vorzüglichen Methode Jedem, dem es um Bildung des Verstandes zu thun ist, nicht genugsam zu empfehlen. Insbesondere ist, wie mich dünkt, der ihr eigene Gang, den sie in Entwickelung ihrer Lehren nimmt, an ihr zu rühmen; indem sie nicht nur mit den gemeinsten und einfachsten Sätzen den Anfang macht, immer allmälig zu zusammengesetztern Wahrheiten fortschreitet, und zuletzt von Dingen, die alle Kräfte des menschlichen Verstandes zu übersteigen

21 X 1 22

Digitized by Google

schienen, befriedigende Aufschlüsse giebt, sondern auch überhaupt sich mit einer mäßigen Anzahl von völlig festgesetzten Grundlehren begnügt, auf deren Anwendung alle noch so schwere Untersuchungen, die sie anstellt, sich einschränken. Diese Grundlehren, die man unter dem Namen der Elemente begreift, machen demnach bey ihr die Hauptsache aus, so daß der, welcher sich solche recht zu eigen gemacht hat, keines weitern Unterrichts bedarf, um in das verborgenste seiner Wissenschaft einzudringen. Wie sehr man auch zu allen Zeiten bemühet gewesen sey, diese Elemente auf das sorgfältigste zu bearbeiten, das beweisen die Schriften der alten und neuen Mathematiker, welche sich hiedurch um ihre Wissenschaft Verdienste erworben haben. Diesen nicht sowohl nachzueifern, denn hiezu fühle ich meine Kräfte zu schwach, als vielmehr durch eine vorläufige Zubereitung ihnen geschickte Schüler zuzuführen, war die Absicht, in welcher ich die Elemente der Mathematik nach einem Plan auszuführen unternommen habe, der meines Bedünkens das Studium einer so vorzüglichen Wissenschaft Anfängern zu erleichtern geschickt ist. Freylich verstehe ich durch diese Erleichterung kein Zusammenstoppeln seichter, durch und durch mangelhafter Kenntnisse, die in keiner Wissenschaft, am wenigsten in der Mathematik, wo strenge Methode die einzige Methode ist, Nutzen bringen; sondern eine sorgfältige Wahl der Grundwahrheiten, eine genaue Anordnung des Ganzen und der Theile,

einen

Digitized by Google

einen bestimmten Ausdruck der einzelnen Sätze, und eine Entwickelung der Beweise, die solche durch kürzern Vortrag nur desto einleuchtender macht. Daß nur hierauf jede Erleichterung gehen müsse, werden mir die, welche die Mathematik kennen, und überhaupt alle, welche wissen, was zur Würde einer Wissenschaft gehört, gern zugeben; aber ein Punkt ist noch übrig, der zweifelhaft seyn könnte, und den ich nicht verschweigen darf, da ich unter zweyen Wegen, die ich gehen konnte, einen erwählen mußte. Es ist nämlich die Frage: ob man Anfängern die trockenen Lehren vorlegen, oder deren Vortrag mit nutzbaren Anwendungen verweben solle; und durch welches von beyden das Studium der Wissenschaft am meisten erleichtert werde. Die eine Parthey stimmt für die unmittelbare Anwendung eines jeden Satzes; theils weil den Lehrling natürlicher Weise zu wissen verlange, wozu das was er lernen soll nützlich sey; theils weil der Satz selbst durch seine Anwendung in mehreres Licht gesetzt werde; theils weil der Vortrag durch die specielle Behandlung viel von seiner Trockenheit verliere, und durch die Mannichfaltigkeit der Sachen an Lebhaftigkeit und Interesse gewinne. Die andere Parthey fodert eine gedrängte Behandlung der Lehren und Vorschriften, die nur durch wenige, aber ausgesuchte Beyspiele erläutert werden, und verspart die Anwendung der abstracten Lehren für die im Folgenden häufig vorkommenden Gelegenheiten, wo erst ein

Digitized by Google

rechter Gebrauch davon zu machen ist. Ich getraue mir zwar nicht, zwischen diesen Partheyen zu entscheiden; aber das dünkt mich doch, daß man bey letzterer wichtigere Vortheile gewinnen, und der Natur der Sache viel näher kommen könne. Denn wird nur das, was zur Hauptsache gehört, ohne fremde Einmischung gesagt, und daher in einen engern Raum zusammengebracht: so wird nicht nur die Aufmerksamkeit des Lehrlings auf die Sache allein geheftet, sondern auch die Uebersicht des Ganzen, und der Gebrauch des Erlernten, um ein Großes erleichtert. Hiezu kommt noch, welches vorzüglich zu bedenken ist, daß frühzeitige Anwendungen schwieriger sind, als es vielen, denen nicht alles dazu erforderliche bekannt ist, zu seyn scheint. Und überhaupt genommen, glaube man, einem nicht gar seltenen Vorurtheile nach, ja nicht, daß man dem Abstracten durch das Individuellere sehr zu Hülfe kommen könne. Denn die Absicht aller unserer Abstractionen, die zu den nothwendigen Unvollkommenheiten endlicher Geister gehören, ist ja, die möglich-wenigsten Ideen zusammenzustellen, um unserm eingeschränkten Blicke zu statten zu kommen; da jeder Lehrsatz und jede Aufgabe um desto schwerer zu übersehen ist, je mehrere besondre Bestimmungen darein verwebt sind. Die Erlernung abstracter Regeln ist daher nicht das Schwere der Wissenschaft, welches man zu überwinden hat; sondern die Anwendung dieser Regeln ist es, wozu mehr Kenntniß, mehr Uebung,

und

Digitized by Google

und mehr Kopf erfodert wird, als man beym ersten Anfange der Erlernung voraussetzen kann. Dieses wird mich hoffentlich rechtfertigen, daß ich bey meinem Plane nicht diejenigen Lehrlinge vor Augen gehabt, welche nur für specielle Absichten die Mathematik erlernen, und sich auch nur auf einen besondern Theil derselben einschränken wollen, welche daher zur frühesten Anwendung des wenigen eilen, was sie nun etwa wissen, so mangelhaft solche auch seyn mag; sondern mich vielmehr nach dem bessern Theile gerichtet habe, welcher das Ganze zu umfassen strebt, und nicht eher Anwendungen verlangt, als bis solche in ihrer Vollkommenheit gemacht werden können. Auch konnte es mir an solchen Anwendungen, jede an dem ihr zugehörigen Orte, nicht fehlen, da die Wissenschaft, die ich zu bearbeiten hatte, von einem so weiten Umfange, und von so reichen und mannichfaltigen Inhalte ist, auch alle ihre Theile solche Beziehungen auf einander haben, daß der eine der Hülfe des andern nicht entbehren kann. In Rücksicht auf diese Beziehungen trage ich die gesammte Mathematik in sechs Büchern vor, welche der Arithmetik, die Geometrie, die Analysis, die mechanischen, die optischen, und die astronomischen Wissenschaften abhandeln. Mein Vorsatz war Anfangs, alle sechs Bücher auf einmal zu liefern; aber mancherley Ursachen nöthigten mich, nur die drey ersten in einem Theile zusammenzufassen, und die drey letzten für einen zweyten

Theil, welcher aufs späteste nächstkünftige Ostermesse erscheinen, und den ersten an Bogenzahl wenigstens nicht übertreffen wird, zu bestimmen. Vorizt habe ich also blos von der Einrichtung des ersten Theils noch kürzlich Rechenschaft zu geben. Das erste Buch enthält die gemeine und allgemeine Arithmetik. Bey jener setze ich das Mechanische der gemeinsten Rechnungsarten zum voraus; weil man meines Bedünkens von der Mathematik nichts weiter fodern kann, als daß sie bey den gemeinsten Rechnungen nur die Gründe des Verfahrens angebe; diese habe ich von der Algebra getrennt, weil vielen, die wohl keine Algebraisten werden möchten, es doch äußerst nützlich ist, die Buchstaben-Formeln, welche in allen neuern mathematischen Schriften vorkommen, und welche zur Erleichterung der Beweise und Abkürzung des Vortrags ungemein dienlich sind, zu verstehen; und weil insbesondere die wichtige Lehre von den Proportionen, Progreßionen und Logarithmen, durch dieses Hülfsmittel um ein Großes erleichtert werden konnte; in beyden habe ich mit Herrn Euler den Begriff der Rechnungsarten, oder sogenannten Species, allgemeiner gefaßt, so daß die Erhebung zu Potenzen, die Extrahirung der Wurzeln, und die logarithmischen Rechnungen mit dazu gezählt werden müssen. Das zweyte Buch begreift die reine und die gemischte Geometrie. Denn ich fand es für die Methode sowohl, als für die Sache selbst vortheilhaft, den

für

Digitized by Google

für sich bestehenden und keiner fremden Principien bedürfenden, von dem mit Arithmetik gemischten, Theil der Geometrie, nach dem Beyspiele großer Vorgänger abzusondern. Zu dieser Absonderung hatte ich noch den besondern Grund, daß ich den Gedanken, mit dem ich mich schon lange beschäftigt habe, bey dieser Gelegenheit in Ausführung bringen wolte: die Geometrie des Euklides der neuern Mathematik ganz einzuverleiben. Solte ich in diesem Versuche so glücklich gewesen seyn, als ich es zu werden bemüht gewesen bin: so schmeichle ich mir, den Anfängern keinen geringen Dienst hiedurch geleistet zu haben, und hoffe, daß solches zugleich bey vielen die Lust erwecken werde, dieses unschätzbare Denkmal des Alterthums in seinem ganzen Umfange zu studiren, wozu ihnen auch durch die vor einigen Jahren von mir herausgegebene deutsche Uebersetzung der Elemente des Euklides vielleicht bequemere Gelegenheit verschaft worden ist. Das dritte Buch umfaßt die Analysis sowohl des Endlichen, als des Unendlichen; wobey ich in Absicht des erstern es für rathsam hielt, den allgemeinen und den geometrischen Calculus von einander abzusondern, und daher drey besondere Abschnitte zu machen. Da in diesem Theile der Mathematik, der in vielen Stücken noch neu ist, die Begriffe, die man mit den Wörtern Analysis, Algebra, allgemeine Arithmetik, höhere Mathematik, verbinden soll, nicht übereinstimmig angegeben werden, und die

Grenzen dieser Wissenschaften nicht allgemein festgesetzt sind: so mußte ich bemühet seyn, die Grenzlinien wenigstens so zu ziehen, als ich glaubte, daß sie Anfängern am besten einleuchten würden. Diese drey Bücher fassen demnach die Elemente dessen, was man unter den Namen der reinen oder abstracten Mathematik begreift, im kurzen und doch dabey vollständig in sich; wenn man anders nicht dies für einen Mangel hält, daß ich manche Lehren unberührt, oder doch unausgeführt gelassen, welche freylich an sich von ungemeiner Brauchbarkeit in der ganzen Mathematik sind. Ich rechne dahin besonders den trigonometrischen Calculus, die Lehre von den Permutationen und Combinationen, die binomische Regel, die Theorie von den Wurzeln der Gleichungen, die Behandlung und den Gebrauch der unendlichen Reihen, die neuere Berechnungsart der Logarithmen, und was sonst noch von Erheblichkeit übrig seyn mag. Aber meines Erachtens muß man Anfänger nicht allzusehr überhäufen, und ihnen den ersten Cursus nicht ohne Noth erschweren; jedoch es ihnen zugleich fühlbar zu machen suchen, wie vieles ihrer Wißbegierde würdiges noch übrig sey, zu dessen Erlernung sie zubereitet worden; auch ist mein Vorsatz, durch künftige Beyträge zu diesen Elementen, den wißbegierigen Schülern der Mathematik in Erweiterung der erlangten Kenntnisse behülflich zu seyn. Für diejenigen, welche bey ihrem mathematischen Studium nur eingeschränkte Absich-

Absichten haben, enthalten diese Elemente viel mehr, als sie verlangen; sind aber auch so eingerichtet, daß eine beliebige Auswahl für dergleichen Lehrlinge gar füglich gemacht werden kann. So kann z. B. das ganze dritte Buch übergangen, oder solches auf die beyden ersten, ja wenn man will auch nur auf den ersten Abschnitt eingeschränkt werden. Aus dem ersten Buche kann man blos den ersten Abschnitt ausheben, und in dem zweyten Abschnitte sich mit dem ersten Kapitel wenn man will begnügen; ja selbst in der gemeinen Arithmetik kann man so verschiedene Cursus machen, als Kapitel darinn enthalten sind. Noch mannichfaltiger läßt sich vom zweyten Buche Gebrauch machen, da man z. B. das mathematische Studium gleich mit der Geometrie anfangen kann, ohne Arithmetik vorauszuschicken, welche erst alsdenn nöthig wird, wenn man auf die Lehre von der Aehnlichkeit kommt; so wie sich auch für diejenigen, denen es nur um historische Erkenntniß und Praxis zu thun ist, die Sätze von den Demonstrationen absondern lassen. Für alle dergleichen eingeschränkte Absichten, die so mannichfaltig seyn können, eben so viel besondere Lehrbücher zu verfassen, würde etwas sehr überflüßiges seyn, da ein einziges allen zusammen, und jedem insbesondere ein Genüge leisten kann; nicht zu gedenken, daß oft mancher dadurch Lust bekömmt, allmälig weiter zu gehen, als er anfangs gesonnen war.

Zum

Digitized by Google

Zum Beschluß dieser Vorrede kann ich nicht umhin, zur Ehre der Verlagshandlung öffentlich zu rühmen, daß solche nichts verabsäumet, um dieses Werk correct und mit aller typographischen Genauigkeit zu liefern, welche sich von der Breitkopfischen Druckerey erwarten läßt. Geschrieben zu Closter Berge bey Magdeburg in der Ostermesse 1785.

Johann Friedrich Lorenz.

Allge-

Allgemeiner Entwurf des ersten Theils.

Erstes Buch: Elemente der Arithmetik.

I. Die gemeine Arithmetik.

1. Von den ganzen Zahlen. S. 3
2. Von den Brüchen. 23
3. Von den Proportionen 37

II. Die allgemeine Arithmetik.

1. Von der Buchstabenrechnung 43
2. Von den Zahlensystemen 68
3. Von den Proportionen. 76
4. Von den Progressionen. 93
5. Von den Logarithmen. 102

Zweytes Buch: Elemente der Geometrie.

I. Die reine Geometrie.

1. Von den ebenen Figuren. 125
2. Von den körperlichen Figuren. 197

II. Die gemischte Geometrie.

1. Von der Ausmessung der Größen. 227
2. Von der Berechnung ebener Triangel 253
3. Von der Berechnung körperlicher Triangel. 265

Drittes Buch: Elemente der Analysis.

I. Die gemeine Analysis, oder die Algebra.

1. Von den bestimmten Aufgaben. 287
2. Von den unbestimmten Aufgaben 307

II. Die analytische Geometrie.

1. Von den bestimmten Aufgaben. 317
2. Von den unbestimmten Aufgaben. 334

III. Die höhere Analysis.

1. Von der Differentialrechnung. 369
2. Von der Integralrechnung. 396

Specieller Entwurf des ersten Theils.

I. Die gemeine Arithmetik.

I. Von den ganzen Zahlen.

1. Numeration 3
2. Addition. 5
3. Subtraction. 6

4. Mul-

Digitized by Google

4. Multiplication. 6
5. Division. 8
6. Maaß der Zahlen. 10
7. Potenzen und Wurzeln 14
8. Begrif der Rechnungsarten. 18
9. Grundsätze der ganzen Mathematik 20

II. Von den Brüchen.
1. Natur der Brüche. 23
2. Aufheben der Brüche. 27
3. Gleichnamige Brüche. 27
4. Addition der Brüche. 30
5. Subtraction der Brüche. 31
6. Multiplication der Brüche. 32
7. Division der Brüche. 33
8. Potenzen und Wurzeln der Brüche. 35

III. Von den Proportionen.
1. Erklärungen. 37
2. Lehrsätze. 38
3. Aufgaben. 40

II. Die allgemeine Arithmetik.

I. Von der Buchstabenrechnung.
1. Allgemeine Bezeichnung der Größen. 46
2. Natur entgegengesetzter Größen. 50
3. Allgemeine Addition. 51
4. Allgemeine Subtraction 52
5. Allgemeine Multiplication 54
6. Allgemeine Division. 56
7. Allgemeines Potenziren. 59
8. Allgemeines Extrahiren 62
9. Irrationalgrößen 63
10. Unmögliche oder eingebildete Größen. 66

II. Von den Zahlensystemen.
1. Natur der Zahlensysteme. 68
2. Decadisches Zahlensystem. 69
3. Sexagesimalsystem. 74

III. Von den Proportionen.
1. Natur der Proportion. 76
2. Natur der arithmetischen Proportion. 77
3. Natur der geometrischen Proportion. 79

4. Zusam-

Digitized by Google

4. Zusammensetzung geometrischer Proportionen. S. 82
5. Practische Rechnungsregeln. 86

IV. Von den Progreßionen.
1. Natur der arithmetischen Progreßion. 93
2. Summe einer arithmetischen Progreßion. 94
3. Natur der geometrischen Progreßion. 96
4. Summe einer geometrischen Progreßion. 98

V. Von den Logarithmen.
1. Natur der Logarithmen. 102
2. Die logarithmischen Tafeln. 107
3. Gebrauch der Logarithmen. 114

III. Die reine Geometrie.

I. Von den ebenen Figuren, oder die Planimetrie.
1. Erste Begriffe von Figuren. 125
2. Lehre von den Triangeln. 130
3. Lehre von den Parallellinien. 142
4. Verwandlung geradlinichter Figuren. 148
5. Lehre von dem Cirkel. 154
6. Geradlinichte Figuren am Cirkel. 168
7. Aehnlichkeit geradlinichter Figuren. 173
8. Proportionen beym Cirkel. 189

II. Von den körperlichen Figuren, oder die Stereometrie.
1. Lage der Ebenen. 197
2. Prismatische Körper. 206
3. Körper die nicht prismatisch sind. 218

IV. Die gemischte Geometrie.

I. Von der Ausmessung der Größen.
1. Ausmessung der Linien und Winkel. 227
2. Ausmessung der Flächen. 233
3. Ausmessung der Körper. 242

II. Von der Berechnung ebener Triangel, oder die ebene Trigonometrie.
1. Natur der trigonometrischen Linien. 253
2. Lehren zur Berechnung ebener Triangel. 260
3. Aufgaben für die Berechnung ebener Triangel. 263

III. Von der Berechnung körperlicher Triangel, oder die sphärische Trigonometrie.
1. Natur der sphärischen Triangel. 265

Digitized by Google

2. Berechnung rechtwinklichter sphär. Triangel §. 268
3. Berechnung schiefwinklichter sphär. Triangel. 275

V. Die gemeine Analysis, oder die Algebra.

I. Von den bestimmten Aufgaben.
1. Form der Gleichungen. 287
2. Reine Gleichungen. 299
3. Gemischte quadratische Gleichungen. 304

II. Von den unbestimmten Aufgaben.
1. Natur der unbestimmten Aufgaben. 307
2. Einfache unbestimmte Aufgaben. 310
3. Zusammengesetzte unbestimmte Aufgaben. 313

VI. Die analytische Geometrie.

I. Von den bestimmten Aufgaben.
1. Grundlehren. 317
2. Einfache Gleichungen. 323
3. Quadratische Gleichungen. 329

II. Von den unbestimmten Aufgaben.
1. Grundlehren. 334
2. Ableitung der Functionen aus den Linien. 341
3. Ableitung der Linien aus den Functionen. 347
4. Allgemeine Betrachtung der Linien. 361

VII. Die höhere Analysis, oder die Analysis des Unendlichen.

I. Von der Differentialrechnung.
1. Natur der Differentiale. 369
2. Differentiirung gemeiner Größen. 377
3. Differentiirung der Exponentialgrößen. 383
4. Gebrauch der Differentiale. 387

II. Von der Integralrechnung.
1. Natur der Integrale. 396
2. Integrirung gemeiner Differentiale. 401
3. Integrirung der Exponential-Differentiale. 411
4. Gebrauch der Integrale. 414

Erstes

Digitized by Google

Erstes Buch.

Elemente der Arithmetik.

Digitized by Google

1. Die gemeine Arithmetik.

2. Die allgemeine Arithmetik.

Digitized by Google

Erster Abschnitt.

Die gemeine Arithmetik.

1. Von den ganzen Zahlen.
2. Von den Brüchen.
3. Von den Proportionen.

Erstes Kapitel.

Von den ganzen Zahlen.

I. Numeration.

§. 1.

Wenn man Dinge zählt, so sieht man sie für gleich an, und nennt jedes derselben Eins, oder die Einheit. Eine Zahl ist ein Vielfaches der Einheit, oder ist aus Einheiten zusammengesetzt. Ziffern sind besondere Zeichen der Zahlen. Eine ganze Zahl heißt, deren Einheit das Ganze ist; eine gebrochene Zahl aber, oder ein Bruch, deren Einheit ein bestimmter Theil des Ganzen ist. Eine Zahl, deren Einheiten durch ihren Namen bestimmt sind, heißt eine benannte Zahl; ist die Art der Einheiten aber unbestimmt, so heißt die Zahl unbenannt.

Digitized by Google

§. 2.

In einer Reihe neben einander gesetzter Ziffern steigt ihr Werth von der Rechten gegen die Linke, so daß zehn Einheiten einer vorhergehenden Ziffer eine Einheit der nächstfolgenden ausmachen, das heißt, daß die Einheiten jeder folgenden Ziffer zehnmal gröſſer sind, als die Einheiten der nächst vorhergehenden. Sind daher die Einheiten der letzten Ziffer zur Rechten einfache oder primitive Einheiten: so sind die Einheiten der übrigen zusammengesetzte, oder Einheiten höherer Ordnungen; nämlich der ersten, zweyten, dritten u. s. w. so wie die Ziffern nach den primitiven Einheiten auf einander folgen.

§. 3.

Die primitiven Einheiten heißen Einer; die Einheiten der ersten höhern Ordnung, Zehner; der zweyten, Hunderte; der dritten, Tausende; der vierten, Zehntausende; der fünften, Hunderttausende; der sechsten, Tausendtausende, oder kürzer, Millionen.

§. 4.

Zählt man auf eben die Art, wie man die Einer gezählt hat, nun auch die Millionen: so kommen in der zwölften höhern Ordnung Tausendtausende von Millionen, oder kürzer, Billionen. Auf gleiche Art erhält man in der achtzehnten höhern Ordnung Trillionen; in der vier und zwanzigsten Quadrillionen; in der dreyßigsten Quintillionen u. s. w.

§. 5.

Die unbesetzten Stellen in einer solchen Reihe werden mit einer Null bezeichnet, welche also den Mangel der Einheiten bedeutet, und zugleich dient, die Einheiten und Zahlen verschiedener Ordnungen

von

Digitized by Google

von einander zu unterscheiden; auch Einheiten und Zahlen in verschiedene Ordnungen zu versetzen.

Zusatz. Statt einer Ziffer Nullen anzuhängen, kann man auch die Anzahl der Nullen über die Ziffer setzen. Z. E. 5000, oder 5^{3}, heißt, 5 Einheiten aus der dritten höhern Ordnung, oder aus der Klasse der Tausende.

II. Addition.

§. 6.

Zahlen addiren heißt eine Zahl finden, welche den gegebenen zusammen gleich ist. Die gefundene Zahl heißt die Summe; die gegebnen aber heißen die summirenden Zahlen.

§. 7.

Man findet die Summe, wenn man die gegebnen Zahlen mit ihren gleichförmigen Einheiten unter einander setzt, und solche von der Rechten an so zusammenzählt, daß jedesmal für zehn Einheiten einer jeden Ordnung eine Einheit zur nächstfolgenden Ordnung hinzukomme.

§. 8.

Auf eben die Art werden auch benannte Zahlen, als Geldsorten, Gewichte, Maaße, und dergleichen, addirt, daß man die Größen von einerley Art zusammenzählt; nur muß man jedesmal wissen, wie viel Einheiten einer niedrern Klasse eine Einheit der nächsthöhern ausmachen.

Digitized by Google

III. Subtraction.

§. 9.

Zahlen subtrahiren heißt eine Zahl finden, welche den Ueberschuß der größern über der kleinern anzeigt, und daher mit der kleinern zusammen der größern gleich ist. Die gefundene Zahl heißt der Rest, oder die Differenz; von den gegebenen Zahlen aber die größere der Minuendus, die kleinere der Subtrahendus.

§. 10.

Um den Rest zu finden, setze man die Einheiten der kleinern Zahl unter die gleichförmigen Einheiten der größern, nehme von der Rechten an jene von diesen hinweg, und bemerke den jedesmaligen Rest. Kommt dabey eine Ordnung vor, worinn die obere Ziffer kleiner als die untere ist: so giebt eine Einheit, um welche man die obere Ziffer vermindert, zehn Einheiten der nächst vorhergehenden.

§. 11.

Nach eben der Regel werden auch benannte Zahlen subtrahirt, wenn man die Größen einerley Art von einander wegnimmt; nur muß man dabey wissen, wenn man eine höhere Klasse um eine Einheit zu vermindern hat, wie viel Einheiten zur nächst vorhergehenden Klasse dafür hinzu kommen.

IV. Multiplication.

§. 12.

Zahlen multipliciren heißt die eine Zahl so vielmal zu sich selbst addiren, als die andre Einheiten enthält. Die daher entstehende Summe, in welcher jede

Digitized by Google

jede der gegebenen Zahlen so vielmal enthalten ist, als die Einheit in der andern, heißt das Product oder Factum; die gegebenen Zahlen aber heißen Factoren, und zwar diejenige, welche addirt wird, der Multiplicandus, diejenige aber, welche anzeigt, wie vielmal jene addirt werden soll, der Multiplicator oder Multiplicans.

Zusatz. Sind drey Factoren gegeben: so soll das Product von zwey derselben mit dem dritten multiplicirt werden. Dies erklärt zugleich den Fall für vier und mehrere Factoren.

§. 13.

Um das jedesmalige Product zu finden, unterscheide man folgende Fälle:

Ist der Multiplicans eine einfache Ziffer und aus der Klasse der Einer: so setze man den Multiplicandus so vielmal, als der Multiplicans Einheiten enthält, unter einander, und mache die Summe. §. 7. Diese Operation aber wird durch die Pythagorische Tafel (das sogenannte Einmaleins) welche in der ersten Reihe das einfache, in der zweyten das zweyfache und so weiter das drey- vier- fünf- sechs- sieben- acht- und neunfache aller neun Ziffern enthält, sehr abgekürzt.

Ist der Multiplicans eine einfache Ziffer, aber aus einer der höhern Ordnungen, z. E. 300: so sehe man ihn als ein Product der Ziffer in die Einheit der höhern Ordnung an, z. E. $300 = 3.100$, suche das Product der einfachen Ziffer in den Multiplicandus, und erhebe dasselbe in die höhere Ordnung. §. 5.

Ist der Multiplicans aus mehrern Ziffern zusammengesetzt: so suche man die einzelnen Producte aus den einzelnen Theilen des Multiplicans in den Multiplicandus, und bringe solche in eine Summe.

Zusatz. Daß einerley Factoren, man mag ihre Ordnung ändern wie man will, einerley Product geben, erhellet für einfache Factoren aus der Pythagorischen Tafel; und gilt folglich auch für zusammengesetzte.

§. 14.

Eine benannte Zahl kann nicht mit einer benannten, sondern nur mit einer unbenannten Zahl multiplicirt werden; weil die Multiplication bey dem Multiplicans nur auf die Zahl seiner Einheiten, nicht aber auf deren Namen siehet. Das daher entstehende Product ist mit dem Multiplicandus von gleichem Namen. Die Art der Operation bey zusammengesetzten Zahlen folgt §. 19.

V. Division.

§. 15.

Zahlen dividiren heißt die kleinere Zahl von der größern so vielmal subtrahiren, bis gar kein, oder ein solcher Rest bleibt, der kleiner ist, als die gegebene kleinere Zahl. Die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal die Subtraction geschehen, oder, wie vielmal die kleinere Zahl in der größern enthalten ist, heißt der Quotient; von den gegebenen Zahlen aber die größere der Dividendus, und der kleinere der Divisor.

Zusatz. 1. Bleibt hiebey kein Rest, so ist der Dividendus ein Product, dessen Factoren der Divisor und Quotient sind; und bleibt ein Rest, so gilt vom Dividendus, nachdem solcher Rest von ihm subtrahirt worden, eben dasselbe.

2. Daher ist im Dividendus nicht nur der Divisor so vielmal enthalten, als die Einheit im Quotienten; sondern auch der Quotient so vielmal, als die Einheit im Divisor.

3. Dem-

3. Demnach kann man die Division als eine zweyfache Art der Eintheilung ansehen, so daß der Divisor anzeigt, entweder in wie viel Theile der Dividendus zu theilen sey, oder wie groß jeder Theil des Dividendus seyn solle. Im ersten Falle zeigt der Quotient die Größe, im zweyten die Anzahl dieser Theile.

§. 16.

Um den Quotienten zu finden, subtrahire man entweder den einfachen Divisor, oder kürzer, ein Vielfaches des Divisors vom Dividendus, wiederhole solches mit dem Reste so lange es angehet, und bemerke jedesmal solches Vielfache.

Vergleicht man hiezu durch Hülfe der Pythagorischen Tafel die höchste Ziffer des Divisors mit der höchsten Ziffer des Dividendus, und sucht eine Zahl welche in den Divisor multiplicirt ein Product giebt welches sich von einem gleichen oder zunächst größern Theil des Dividendus subtrahiren läßt: so giebt die gefundene Zahl die höchste Ziffer des gesuchten Quotienten.

Wiederholt man diese Operation mit jeder folgenden Ziffer des Dividendus, zu welcher man den etwannigen Rest geschlagen hat: so erhält man nach und nach die übrigen Ziffern des Quotienten.

§. 17.

Eine benannte Zahl kann nicht nur mit einer unbenannten, sondern auch mit einer benannten Zahl dividirt werden. Denn im ersten Falle bestimmt der Divisor die Anzahl, der Quotient aber die Größe der Theile; im zweyten Falle bestimmt der Divisor die Größe, der Quotient aber die Anzahl der Theile. Die Art der Operation folgt §. 20.

Digitized by Google

§. 18.

Eine benannte Zahl reduciren heißt sie auf einen größern oder kleinern Namen bringen. Man bringt sie aber auf einen kleinern Namen, wenn man die Einheiten der höhern Klasse mit der Zahl der Theile der niedrern, welche jede Einheit der höhern enthält, multiplicirt; und auf einen größern Namen, wenn man die Einheiten der niedrern Klasse mit der Zahl der Theile, welche eine Einheit der verlangten höhern Klasse ausmachen, dividirt.

§. 19.

Soll man zusammengesetzte benannte Zahlen mit einer unbenannten Zahl multipliciren: so multiplicire man damit die benannte Zahl von der niedrigsten bis zur höchsten Klasse, bringe das Product jeder niedrern Klasse auf den nächst größern Namen, §. 18. und addire den gefundenen Quotienten zu dem Producte der höhern Klasse.

§. 20.

Soll man zusammengesetzte benannte Zahlen mit einer unbenannten Zahl dividiren: so dividire man sie damit von der höchsten Klasse an, bringe den etwanigen Rest auf den nächst kleinern Namen §. 18, und schlage ihn zur nächst folgenden Klasse, mit welcher man eben so verfährt. Wäre aber der Divisor benannt, so reducire man alles auf einerley Namen §. 18, und suche alsdenn den Quotienten.

VI. Maaß der Zahlen.

§. 21.

Eine Zahl geht auf in einer andern, wenn sie die andre ohne Rest dividirt. Eine Zahl heißt ein Maaß

Maaß der andern, wenn sie in der andern aufgehet.

Zusatz. Demnach ist die Einheit das Maaß einer jeden Zahl; und jede Zahl ein Maaß von ihr selbst.

§. 22.

Ein gemeines Maaß mehrerer Zahlen ist, was in jeder dieser Zahlen aufgehet. Das größte gemeine Maaß mehrerer Zahlen ist, wenn nichts gröſseres in jeder dieser Zahlen aufgehet.

§. 23.

Eine Zahl, welche nur sich selbst, oder die Einheit, zum Maaße hat, heißt eine einfache Zahl, oder Primzahl. Jede Zahl aber, die irgend eine von ihr verschiedene Zahl zum Maaße hat, heißt eine zusammengesetzte Zahl.

§. 24.

Eine zusammengesetzte Zahl ist als ein Product, und ihr Maaß nebst dem daher entstehenden Quotienten als ihre Factoren anzusehen; und man sagt; sie sey aus diesen Factoren oder Theilern zusammengesetzt, oder werde in diese Factoren oder Theiler zerfällt. So ist z. E. $105 = 3 \cdot 35$.

§. 25.

Jede Zahl ist entweder eine Primzahl, oder eine aus Primzahlen zusammengesetzte Zahl.

Denn ist sie keine Primzahl, so besteht sie aus Factoren. Sind nun diese Factoren auch zusammengesetzt, so lassen sie sich aufs neue in Factoren zerfällen, so lange sie noch keine Primzahlen sind. So ist z. E. $105 = 3.5.7$.

§. 26.

Digitized by Google

§. 26.

Eine Zahl, 7, die in einem von den Factoren eines Products (35. 3) aufgeht, die muß auch in diesem Producte aufgehen.

Denn sie ist alsdenn auch ein Factor des Products, (5. 7. 3).

§. 27.

Eine Zahl, 5, die in zwey andern Zahlen, 15, 5, aufgeht, die muß auch in der Summe dieser beyden Zahlen, 20, aufgehen.

Denn da sie in den beyden Zahlen aufgeht, so ist sie in der einen sowohl als in der andern ohne Rest ein- oder etlichemal, folglich in beyden zusammen ohne Rest etlichemal enthalten, und geht also in der Summe auf.

§. 28.

Eine Zahl, 5, die in der Summe zweyer Zahlen, 25, und in einer von beyden, 10, aufgeht, die muß auch in der andern, 15, aufgehen.

Denn da sie in der Voraussetzung in der einen Zahl und in der Summe ohne Rest ein- oder etlichemal enthalten ist, so muß sie auch in der andern ohne Rest ein- oder etlichemal enthalten seyn, und geht also in der andern Zahl auf.

§. 29.

Wenn von zwey Zahlen, 21, 7, die kleinere in der größern aufgeht: so ist sie das größte gemeine Maaß der beyden Zahlen.

Denn da die kleinere in ihr selbst, und nach der Voraussetzung in der größern aufgeht, so ist sie ein gemeines Maaß von beyden; und zwar das größte, weil offenbar kein größeres in der kleinern aufgehen kann.

§. 30.

Digitized by Google

§. 30.

Wenn von zwey Zahlen, 28, 12, die kleinere in der größern nicht aufgeht: so kann das gemeine Maaß von beyden nicht größer, als der Rest, 4, seyn.

Denn die größere Zahl besteht aus dem Producte der kleinern Zahl in den Quotienten, (12 . 2) und aus dem Reste 4, oder ist die Summe dieses Products und des Rests. Ein gemeines Maaß beyder Zahlen gehet also in der Summe und in dem Producte auf, und muß daher im Reste aufgehen (§. 28), kann also nicht größer als der Rest seyn.

§. 31.

Wenn von zwey Zahlen, 28, 12, die kleinere in der größern nicht aufgeht, aber wohl der Rest, 4, in der kleinern: so ist der Rest das größte gemeine Maaß der beyden Zahlen.

Denn gehet der Rest in der kleinern Zahl auf, so geht er auch in dem Producte der kleinern Zahl in den Quotienten auf §. 26. aber auch in sich selbst, folglich in der Summe des Products und des Rests §. 27. das ist, in der größern Zahl, und ist also ein gemeines Maaß beyder Zahlen; und zwar nach §. 30. das größte.

§. 32.

Wenn von zwey Zahlen die kleinere, 12, in der größern, 32, nicht aufgehet, auch nicht der Rest, 8, in der kleinern: so ist das größte gemeine Maaß der kleinern und des Rests, auch das größte gemeine Maaß der ersten beyden Zahlen.

Denn hätten diese noch ein größeres, so müßte dasselbe auch im Reste aufgehen §. 28, und wäre folglich ein gemeines Maaß der kleinern Zahl und des Restes, und zwar noch größer als das, was vorher schon als das größte angenommen war, welches unmöglich ist.

§. 33.

Digitized by Google

§. 33.

Wenn man von zwey gegebenen Zahlen, 301, 189, die größere mit der kleinern dividirt, und, wenn ein Rest bleibt, den vorhergehenden Divisor mit diesem Reste, und dies immer so fort, bis man einen Rest erhält, der endlich in dem nächst vorhergehenden Divisor aufgehet: so ist solcher Rest das größte gemeine Maaß der beyden gegebenen Zahlen.

Denn da solcher Rest das größte gemeine Maaß für das letzte Paar ist, so ist er es nach §. 32. auch für das vorhergehende Paar, und immer so weiter für alle vorhergehende Paare bis auf das erste.

So giebt z. E. von den gegebenen Zahlen 301, 189, die kleinere in die größere dividirt, zum ersten Reste 112; dieser in 189, zum zweyten Reste 77; dieser in 112, zum dritten Reste 35; dieser in 77, zum vierten Reste 7, welcher in 35 aufgehet, und daher das größte gemeine Maaß der beyden Zahlen, 301, 189, ist.

Denn da der letzte Rest 7 offenbar das größte gemeine Maaß von 35 und 7 ist, so ist er es auch nach §. 32. von 77 und 35, folglich von 112 und 77, folglich von 189 und 112, folglich von 301 und 189.

VII. Potenzen und Wurzeln.

§. 34.

Entsteht ein Product aus lauter gleichen Factoren, so daß ein und derselbe Factor mehrmal in sich selbst multiplicirt dieses Product giebt: so heißt solches Product die Potenz dieses Factors, und solcher Factor die Wurzel dieses Products.

So ist $16 = 4 . 4$, so wie auch $64 = 4 . 4 . 4$, eine Potenz der Zahl 4; und umgekehrt 4 eine Wurzel der Zahl 16, so wie auch der Zahl 64.

§. 35.

Digitized by Google

§. 35.

Bey jeder Potenz heißt die Anzahl der gleichen Factoren der Exponent, wornach die Potenzen sowohl als die Wurzeln gezählt werden. Die zweyte Potenz heißt auch die Quadratzahl; die dritte die Cubikzahl; die vierte die Biquadratzahl: so wie auch die zweyte, dritte, vierte Wurzel die Quadrat- Cubik- Biquadratwurzel genannt wird.

So ist z. E. von 4 die Quadratzahl 16; die Cubikzahl 64; die Biquadratzahl 256. Umgekehrt ist 4 die Quadratwurzel aus 16; die Cubikwurzel aus 64; die Biquadratwurzel aus 256.

§. 36.

Eine Zahl potenziren, oder zu einer Potenz erheben, heißt die Zahl so vielmal in sich selbst multipliciren, als der Exponent Einheiten enthält.

So ist z. E. $4^2 = 4 . 4 = 16$; $4^3 = 16 . 4 = 64$; $4^4 = 64 . 4 = 256$; $4^5 = 256 . 4 = 1024$ u. s. w.

§. 37.

Eine Zahl extrahiren, oder die Wurzel aus einer Zahl ziehen, heißt eine Zahl finden, welche so vielmal, als der Exponent Einheiten enthält, in sich selbst multiplicirt, der gegebenen Zahl gleich wird.

So ist z. E. $\sqrt{16} = 4$, weil $4 . 4 = 16$; $\sqrt[3]{64} = 4$, weil $4 . 4 . 4 = 64$; $\sqrt[4]{256} = 4$, weil $4 . 4 . 4 . 4 = 256$; $\sqrt[5]{1024} = 4$, weil $4.4.4.4.4 = 1024$. u. s. w.

§. 38.

Eine zweytheilige Zahl, oder ein Binomium heißt eine Zahl, die aus zwey Theilen besteht. Das Quadrat

Quadrat einer zweytheiligen Zahl besteht daher aus den Quadraten beyder Theile und dem zweyfachen Producte des einen Theils in den andern.

Denn gleiche Potenzen von gleichen Zahlen sind einander gleich. So ist z. E. $73 = 70 + 3$, folglich $73^2 = (70 + 3)^2$, das ist, $73 \cdot 73 = (70 + 3) \cdot (70 + 3)$. Multiplicirt man nun den ersten und zweyten Theil mit dem ersten, so entsteht das Quadrat des ersten, und das Product des ersten in den zweyten; multiplicirt man ferner den ersten und zweyten Theil mit dem zweyten, so entsteht abermals das Product des zweyten in den ersten, und das Quadrat des zweyten Theils; folglich zusammen die Quadrate beyder Theile, und das zweyfache Product des einen Theils in den andern. So ist z. E. $73^2 = (70 + 3)^2 = (70 + 3) \cdot (70 + 3) = 70^2 + 2 \cdot (70 \cdot 3) + 3^2 = 5329$.

§. 39.

Aufgabe: aus einer gegebenen Zahl, 413452, die Quadratwurzel zu ziehen.

Die gesammte Folge der Operation zeigt dieses Schema:

```
      41|34|52|643
a² =  36 |
2a = 12) 534
     zab+b² = 496
2a' = 128) 3852
     2a'b'+b'² = 3849
                    3
```

Die einzelnen Stücke der Operation sind allgemein diese:

1) Theile die gegebene Zahl 413452 von der Rechten an in Klassen, jede zu zwey Ziffern.

2) Su-

Digitized by Google

2) Suche in dem sogenannten Wurzeltäflein, welches die Quadrate aller neun einfachen Ziffern enthält, eine Quadratzahl, 36, welche der ersten Klasse zur linken, 41, gleich ist, oder am nächsten kommt, und subtrahire solche Quadratzahl; so ist ihre Wurzel, 6, der höchste Theil der gesuchten Wurzel.

3) Dieser Theil verdoppelt, 12, in den Rest der ersten Klasse mit Zuziehung der ersten Ziffer der folgenden Klasse, 53, dividirt, giebt den nächstfolgenden Theil, 4, dessen Quadrat, nebst Product in dem gebrauchten Divisor von dem Rest der ersten Klasse mit Zuziehung der zweyten Klasse, subtrahirt wird.

4) Mit den bereits gefundenen Theilen der Wurzel, 64, verfahre man eben so, wie mit dem ersten, 6, und wiederhole solche Operationen bis zur letzten Klasse: so erhält man nach und nach alle Theile der gesuchten Wurzel, welche in sich selbst multiplicirt der gegebenen Zahl, um den etwannigen letzten Rest vermindert, gleich ist. So ist in dem gegebnen Beyspiele $643^2 = 413452 - 3$. und nach §. 38. $643^2 = (640 + 3)^2 = (640^2 + 2.(640.3) + 3^2$, und $640^2 = 600^2 + 2.(600.40) + 40^2$.

§. 40.

Aufgabe. Bey Ausziehung der Quadratwurzel die bereits berechneten Quadrattafeln, welche man in Samlungen mathematischer Tafeln findet, zur Abkürzung der Arbeit zu gebrauchen.

Hat man die gegebene Zahl in ihre Klassen getheilt, so suche man in den Tafeln eine Quadratzahl, welche allen, oder den ersten Klassen am nächsten kommt, und subtrahire solche davon. Den etwannigen Rest schlage man zur ersten Zahl der etwa folgenden Klasse, und dividire darein mit der doppelten Wurzel der Tafel: so findet man zu solcher Wurzel den zunächst folgenden Theil, und

Digitized by Google

durch die weitere Operation §. 39. die etwa noch übrigen Theile.

Zu der obigen Zahl 41|34|52| findet man in den Tafeln die nächste Quadratzahl 413449 und die dazu gehörige Wurzel 643, ohne weitere Rechnung.

Zu der Zahl 3|28|85|63|45| findet man für die drey ersten Klassen in den Tafeln die nächste Quadratzahl 32761 und dabey die Wurzel 181, wovon man auf folgende Art Gebrauch macht:

```
   3|28|85|63|45|18134
    3 27 61 |  |
   ---------|  |
362)  1 24 63 |  |
      1 08 69 |  |
     ---------|  |
3626)   15 94 45  |
        14 50 56  |
       ----------
          1 43 89
```

Demnach ist 18134 die Quadratwurzel der gegebnen Zahl um den zuletzt gebliebnen Rest 14389 vermindert. Oder die Quadratwurzel der gegebenen Zahl selbst fällt zwischen die Zahlen 18134 und 18135, wovon jene zu klein, diese zu groß ist.

VIII. Begriff der Rechnungsarten.

§. 41.

Rechnen heißt aus gegebenen oder bekannten, gesuchte oder unbekannte Zahlen finden, welche auf die gegebenen eine bestimmte Beziehung haben. Die Art dieses zu bewerkstelligen ist nach Verschiedenheit solcher Beziehung verschieden, und heißt eine Rechnungsart oder Species der Arithmetik; daher es so viele Rechnungsarten giebt, als verschiedene Bezie-

Digitized by Google

ziehungen der gesuchten Zahl auf die gegebenen Zahlen statt finden können.

§. 42.

Jede Zahl ist wie jede Größe aus Theilen zusammengesetzt, welche entweder gleich oder ungleich sind. Ist die Zahl aus ungleichen Theilen zusammengesetzt, so heißt sie Summe; ist sie aus gleichen Theilen zusammengesetzt, so heißt sie Product oder Factum, jeder ihrer gleichen Theile aber, und die Anzahl derselben heißen die Factoren. Hieraus entstehen vier Rechnungsarten:

1) Die Addition lehret die Zahl finden, deren ungleiche Theile gegeben sind.

2) Die Subtraction lehret zu einer Zahl und einem ihrer ungleichen Theile den andern Theil finden.

3) Die Multiplication lehret aus den Factoren das Product, das ist, eine Zahl finden, welche aus lauter gleichen Theilen besteht, wenn einer ihrer gleichen Theile und die Anzahl derselben gegeben ist.

4) Die Division lehret zu einem Producte und einem der beyden Factoren den andern Factor, das ist, aus einer Zahl die aus gleichen Theilen besteht und einem ihrer Theile die Anzahl der Theile oder einen der gleichen Theile aus ihrer Anzahl, finden.

§. 43.

Bey einem Producte läßt sich noch der Unterschied gedenken, daß die Factoren desselben entweder gleich oder ungleich sind. Der letzte Fall ist besonders für die gemeine Multiplication. Im ersten Falle aber heißt jeder der gleichen Factoren die Wurzel, die Anzahl derselben der Exponent, und das Factum die

Digitized by Google

Potenz. Sind von diesen drey Zahlen zwey gegeben, und man soll die dritte daraus finden, so entstehen noch drey Rechnungsarten:

1) Findet man aus der Wurzel und dem Exponenten die Potenz: so heißt dieses potenziren, oder zur Potenz erheben.

2) Findet man aus der Potenz und dem Exponenten die Wurzel; so heißt dies extrahiren, oder die Wurzel ausziehen.

3) Ist aber die Wurzel und Potenz gegeben: so heißt der Exponent in dieser Rücksicht der Logarithmus der Potenz, und die Art denselben zu finden die logarithmische Rechnung, von welcher erst im Folgenden.

IX. Grundsätze der ganzen Mathematik.

§. 44.

Jede Größe ist sich selbst, so wie auch ihren Theilen zusammen genommen, gleich; folglich größer als jeder ihrer Theile.

§. 45.

Zwey Größen, die einer dritten gleich, sind selbst einander gleich.

§. 46.

Gleiches zu Gleichem addirt, giebt gleiche Summen; Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt gleiche Differenzen.

§ 47.

Digitized by Google

§. 47.

Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt gleiche Producte; Gleiches mit Gleichem dividirt, giebt gleiche Quotienten.

§. 48.

Gleiches zu Ungleichem addirt, giebt ungleiche Summen; Gleiches von Ungleichem subtrahirt, giebt ungleiche Differenzen.

§. 49.

Ungleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt ungleiche Producte; Ungleiches mit Gleichem dividirt, giebt ungleiche Quotienten.

§. 50.

Sind zwey Zahlen einander gleich: so sind auch ihre Potenzen, so wie auch ihre Wurzeln, von gleichen Exponenten einander gleich. Sind zwey Zahlen ungleich: so sind auch ihre Potenzen und Wurzeln von gleichen Exponenten ungleich.

§. 51.

Addition und Subtraction; Multiplication und Division; Potenziren und Extrahiren heben einander auf.

§. 52.

Man kann den Multiplicans mit jeder Zahl multipliciren, wenn man das Product mit derselben Zahl wieder dividirt; und umgekehrt.

Digitized by Google

§. 53.

Man kann den Divisor mit jeder Zahl dividiren, wenn man den Quotienten mit derselben Zahl wieder multiplicirt; und umgekehrt.

§. 54.

Das Zeichen der Addition ist (+) der Subtraction (—) der Multiplication (.) der Division (:) oder ein Strich zwischen den unter einander gesetzten Dividendus und Divisor. Das Zeichen der Gleichheit ist (=) des größern (>) des kleinern (<) der Wurzel ($\sqrt{}$).

Digitized by Google

Zweytes Capitel.

Von den Brüchen.

I. Natur der Brüche.

§. 55.

Ein Bruch ist das Vielfache eines bestimmten Theils der Einheit, und besteht aus zwey Zahlen; dem Nenner, welcher den bestimmten Theil der Einheit anzeigt, und den Zähler, welcher das Vielfache dieses bestimmten Theils der Einheit anzeigt.

Da eine Zahl die Vielheit der Einheit ist, oder durch Vervielfältigung der Einheit entsteht, wobey die Größe der Einheit unbestimmt ist: so kann die Einheit wohl gar keine Größe haben, wie ein Punkt, oder auch so groß seyn als man nur immer will. Hat die Einheit irgend eine Größe: so kann sie beliebig in gleiche Theile getheilt, und ein solcher Theil eben sowohl als die Einheit selbst vervielfältigt werden; woraus denn ein Bruch, oder eine gebrochene Zahl entsteht, welche eben sowohl wie eine ganze Zahl das Vielfache einer Einheit ist; nur mit dem Unterschiede, daß die Einheit einer ganzen Zahl das Ganze, die Einheit einer gebrochenen Zahl aber ein bestimmter Theil des Ganzen ist.

So wird z. E. ein Thaler in 24 gleiche Theile oder Groschen getheilt, so daß $\frac{1}{24}$ Rthl. = 1 Gr. und 5 Rthl. = 5 . 1 Rthl.; aber 5 Gr. = 5 . 1 Gr. = 5 . $\frac{1}{24}$ Rthl. = $\frac{5}{24}$ Rthl.

Digitized by Google

§. 56.

Ein Bruch ist der Quotient, welcher entsteht, wenn eine Zahl mit einer andern dividirt werden soll, so daß der Zähler der Dividendus, und der Nenner der Divisor ist.

Theilte man alle Einheiten einer Zahl in eine bestimmte Anzahl von Theilen, so würde dadurch die Zahl selbst, welche ihren Einheiten zusammen gleich ist, auf die bestimmte Art getheilt. Demnach giebt es außer der bisherigen Methode der Division, mittelst welcher die Zahl selbst getheilt wird, und wobey der Dividendus nicht kleiner als der Divisor seyn darf, auch noch eine andre, welche die einzelnen Einheiten der Zahl theilt, wobey der Dividendus auch kleiner als der Divisor seyn kann.

Z. E. $\frac{5}{24}$ Rthl. heißt 5 Rthl. sollen in 24 gleiche Theile getheilt werden, und es ist $\frac{5}{24}$ Rthl. $= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{24} \cdot 5 = 5$ Gr.

§. 57.

Jeder Bruch ist eine Art von benannter Zahl, so daß der Zähler als die Zahl selbst, und der Nenner als der Name anzusehen ist.

Eine unbenannte ganze Zahl besteht aus Einheiten, deren Art und Größe unbestimmt ist; ein Bruch aber aus Einheiten, welche bestimmte Theile einer Größe sind, und von solcher Bestimmung den Namen führen.

Z. E. bey dem Bruche $\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$ ist 3 die Zahl selbst und $\frac{1}{4}$ ihr Name.

§. 58.

Die Größe der Brüche beruhet bey einerley Nenner auf der Größe der Zähler; bey einerley Zähler auf der umgekehrten Größe der Nenner.

Bey

Digitized by Google

Bey einerley Nenner ist ein Bruch um so vielmal größer, um so vielmal größer sein Zähler ist; weil der Zähler die Zahl, und der Nenner der Name ist. Bey einerley Zähler hingegen ist ein Bruch um so vielmal grösser, um so vielmal kleiner sein Nenner ist; weil der Nenner die Größe der Einheit anzeigt, welche um so viel größer ist, als wenigere Theile sind, in welche man das Ganze theilt.

So ist z. E. $\frac{6}{7}$ noch einmal so groß als $\frac{3}{7}$ auf eben die Art, wie 6 ℔ noch einmal so groß, als 3 ℔; und $\frac{3}{4}$ noch einmal so groß als $\frac{3}{8}$ auf eben die Art, wie 3 Achtgroschenstücke noch einmal so groß als 3 Viergroschenstücke.

§. 59.

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man entweder seinen Zähler mit solcher Zahl multiplicirt, oder seinen Nenner mit solcher Zahl dividirt, §. 58.

So ist $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

§. 60.

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man entweder seinen Zähler mit solcher Zahl dividirt, oder, seinen Nenner mit solcher Zahl multiplicirt, §. 58.

So ist $\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7} = \frac{6}{21}$.

§. 61.

Ein Bruch behält seinen Werth ungeändert, wenn man seinen Zähler und Nenner mit einerley Zahl entweder multiplicirt, oder dividirt. §. 59. 60.

So ist $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$; und $\frac{9}{12} = \frac{9 : 3}{12 : 3} = \frac{3}{4}$.

Digitized by Google

§. 62.

Wird ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt: so ist das Product der Zähler. §. 61.

So ist $\frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4}{4} = \frac{3}{1} = 3$.

§. 63.

Eine ganze Zahl ist einem Bruche gleich, dessen Zähler das Product der ganzen Zahl in den Nenner ist. §. 61.

So ist $3 = \frac{3}{1} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 4}{4}$.

§. 64.

Ein eigentlicher Bruch ist, dessen Nenner im Zähler nicht aufgeht; ein uneigentlicher Bruch, dessen Nenner im Zähler aufgeht. Ein ächter Bruch ist, dessen Zähler kleiner als der Nenner ist; ein unächter Bruch, dessen Zähler nicht kleiner als der Nenner ist. Eine gemischte Zahl besteht aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruche, und entsteht aus der Division ganzer Zahlen, wenn dabey ein Rest bleibt; indem man alsdenn einen Bruch, dessen Zähler der Rest, und dessen Nenner der Divisor ist, zu dem gefundenen Quotienten addirt. §. 56.

§. 65.

Ein Bruch ist benannt oder unbenannt, je nachdem die Einheit, deren bestimmte Theile er enthält, benannt oder unbenannt ist.

§. 66.

Ein benannter Bruch wird reducirt, wenn man mit der Zahl der Theile entweder den Zähler des grössern, oder den Nenner des kleinern Namens multiplicirt. §. 18.

II. Auf-

Digitized by Google

II. Aufheben der Brüche.

§. 67.

Einen Bruch aufheben heißt, ihn auf eine kleinere oder die kleinste Benennung bringen, das ist, ohne seinen Werth zu ändern, durch kleinere, oder die kleinsten Zahlen ausdrücken.

§. 68.

Ein Bruch wird aufgehoben, wenn man Zähler und Nenner des Bruchs mit ihrem gemeinen Maaße, und besonders mit ihrem größten gemeinen Maaße, welches man nach §. 33. findet, dividirt. §. 61. Z. E. $\frac{1464 : 61}{4697 : 61} = \frac{24}{77}$.

Zusatz. Haben Zähler und Nenner eines Bruchs die Einheit zum größten gemeinen Maaße: so läßt sich der Bruch nicht durch kleinere Zahlen ausdrücken, und also nicht aufheben. Z. E. $\frac{216}{1147}$. §. 33.

§. 69.

Auch kann man einen Bruch aufheben, wenn man Zähler und Nenner in ihre einfachen Factoren zerfällt §. 25, (wozu man die schon berechneten Factorentafeln gebrauchen kann) und die gemeinschaftlichen gegen einander vertilgt.

So ist $\frac{231}{385} = \frac{11 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 11 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 3}{17 \cdot 5} = \frac{21}{85}$.

III. Gleichnamige Brüche.

§. 70.

Brüche heißen gleichnamig, die einerley Nenner haben; ungleichnamig, die verschiedne Nenner haben. Letztere gleichnamig machen, oder, unter einer-

Digitized by Google

einerley Benennung bringen heißt, andre den gegebnen gleiche Brüche finden, die einerley Nenner, oder einen Generalnenner haben.

§. 71.

Man macht Brüche gleichnamig, wenn man Zähler und Nenner eines jeden Bruchs mit dem Nenner des andern, oder, wenn es mehrere sind, mit dem Producte aus den Nennern der übrigen Brüche multiplicirt. §. 61.

Wären z. E. die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{7}$ gegeben, so ist $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}$, und $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{20}{28}$.

Oder wären $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ gegeben, so ist $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{70}{105}$; $\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 7}{5 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{84}{105}$; $\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{90}{105}$.

§. 72.

Der kleinste Generalnenner mehrerer Brüche ist die kleinste unter den Zahlen, worinn alle Specialnenner aufgehen.

Man findet aber den kleinsten Generalnenner, wenn man die Specialnenner neben einander setzt; solche mit einem Maaße dividirt, welches wo nicht alle doch die meisten gemein haben; die gefundnen Quotienten, und die durch den gebrauchten Divisor nicht theilbaren Nenner darunter, den gebrauchten Divisor aber zur Seite setzt; mit den darunter gesetzten Zahlen auf eben die Art verfährt, und die Operation so lange fortsetzt, bis kein gemeinschaftliches Maaß mehr statt findet. Alsdenn ist das Product aus den übrig gebliebnen Zahlen und allen gebrauchten Divisoren der gesuchte kleinste Generalnenner. Z. E.

gegebe-

Digitized by Google

gegebene Nenner 63. 42. 84

Divisor 21) 3. 2. 4

Divisor 2) 3. 1. 2

folglich der kleinste Generalnenner = 3. 1. 2. 21. 2 = 252.

Den Grund dieses Verfahrens einzusehen, erwäge man, daß bey Aufsuchung des kleinsten Generalnenners, die gebrauchten Divisoren und übrig gebliebnen Zahlen, die Factoren der gegebnen Nenner sind; folglich jeder Nenner in dem daraus gemachten Producte aufgehen müsse. §. 26; folglich keine kleinere Zahl zu dieser Absicht statt finden könne; folglich solches Product der kleinste Generalnenner sey.

§. 73.

Sollen Brüche **gleichnamig** gemacht werden, so daß sie nicht nur einen Generalnenner, sondern auch den kleinsten Generalnenner haben: so suche man nach §. 72. die kleinste Zahl, worinn alle Specialnenner aufgehen; dividire solche mit jedem gegebenen Nenner; und multiplicire den dazu gehörigen Zähler, mit dem jedesmaligen Quotienten. Das also gefundene Product giebt den neuen Zähler eines jeden Bruchs, die zuerst gefundene Zahl aber den kleinsten Generalnenner der gegebenen Brüche. Z. E.

Gegebene Brüche.		Quotienten.	neue Zähler.
Generalnenner 18	$\frac{4}{9}$	2	8
	$\frac{5}{6}$	3	15
	$\frac{2}{3}$	6	12
Generalnenner 252	$\frac{1}{6}\frac{3}{7}$	4	52
	$\frac{9}{4}\frac{7}{2}$	6	54
	$\frac{1}{8}\frac{1}{4}$	3	33

Nach

Digitized by Google

Nach §. 72. hat man den kleinsten Generalnenner der gegebnen Brüche gefunden. Sucht man nun den Quotienten eines jeden Nenners in solchen Generalnenner, so hat man die Factoren des Nenners für jeden Bruch; so daß, wenn man Zähler und Nenner eines jeden Bruchs mit dem zugehörigen Quotienten multiplicirt, die Brüche ihren Werth behalten, und alle eben denselben kleinsten Generalnenner erhalten.

IV. Addition der Brüche.

§. 74.

Brüche, welche einerley Nenner haben, oder auf einerley Nenner gebracht sind, werden addirt, wenn man ihre Zähler addirt, so daß die Summe ein Bruch wird, dessen Zähler die Summe der gegebenen Zähler, und dessen Nenner der gegebene gemeinschaftliche Nenner ist.

§. 75.

Soll ein Bruch zu einer ganzen Zahl addirt werden: so verwandle man nach §. 63. die ganze Zahl in einen Bruch von gleichem Nenner, und addire beyde Brüche.

So ist $4 + \frac{5}{6} = \frac{24}{6} + \frac{5}{6} = \frac{29}{6}$.

§. 76.

Sollen gemischte Zahlen addirt werden: so verwandle man sie nach §. 75. in unächte Brüche; oder addire die ganzen Zahlen und die angehängten Brüche, jede besonders.

So ist $4\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} = \frac{14}{3} + \frac{11}{4}$. Oder $4\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} = 4 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

§. 77.

Digitized by Google

§. 77.

Sollen benannte Brüche addirt werden: so müssen sie gleichen Namen führen, oder nach §. 66. auf gleichen Namen reducirt werden.

So ist $\frac{3}{4}$ Rthl. + $\frac{2}{3}$ Gr. = $\frac{3 \cdot 24}{5}$ Gr. + $\frac{2}{3}$ Gr. = $\frac{3 \cdot 24 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{226}{15}$ gr. = $15\frac{1}{15}$ gr. = 15 gr. + $\frac{12}{15}$ Pf. Oder $\frac{3}{4}$ Rthl. + $\frac{2}{3}$ Gr. = $\frac{3}{4}$ Rthl. + $\frac{2}{3 \cdot 24}$ Rthl.

V. Subtraction der Brüche.

§. 78.

Brüche, welche einerley Nenner haben, oder auf einerley Nenner gebracht sind, werden subtrahirt, wenn man ihre Zähler subtrahirt, so daß die Differenz ein Bruch wird, dessen Zähler die Differenz der gegebenen Zähler, und dessen Nenner der gegebene gemeinschaftliche Nenner ist.

§. 79.

Soll ein Bruch von einer ganzen Zahl subtrahirt werden, so verwandle man nach §. 63. die ganze Zahl in einen Bruch von gleichen Nenner, und subtrahire die Brüche. Oder, man nehme von der ganzen Zahl eine Einheit, welche man in einen Bruch vom gegebenen Nenner verwandelt, um von demselben den gegebenen Bruch zu subtrahiren.

So ist $4 - \frac{5}{6} = \frac{24}{6} - \frac{5}{6} = \frac{19}{6}$. Oder $4 - \frac{5}{6} = 3 + \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = 3\frac{1}{6}$.

§. 80.

Sollen gemischte Zahlen subtrahirt werden: so verwandle man sie nach §. 75. in unächte Brüche; oder

Digitized by Google

oder subtrahire die ganzen Zahlen, und die angehängten Brüche, jede besonders.

§. 81.

Sollen benannte Brüche subtrahirt werden: so müssen sie gleichen Namen führen, oder nach §. 66. auf gleichen Namen reducirt werden.

VI. Multiplication der Brüche.

§. 82.

Eine Zahl wird mit einem Bruche multiplicirt, wenn man sie mit dem Zähler des Bruchs multiplicirt, und das Product mit dem Nenner dividirt.

Da der Zähler ein Product des Bruchs in den Nenner ist §. 62: so kann man die gegebene Zahl statt des Bruchs mit dem Zähler multipliciren, wenn man das Product mit dem Nenner wieder dividirt, §. 52. Soll z. E. eine Zahl mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt werden: so multiplicire man sie mit $\frac{3}{4} \cdot 4$, das ist, mit 3, und dividire das gefundene Product wieder mit 4.

§. 83.

Brüche werden mit einander multiplicirt, wenn man die Zähler mit einander, und die Nenner mit einander multiplicirt, so daß das Product ein Bruch wird, dessen Zähler das Product der gegebenen Zähler, und dessen Nenner das Product der gegebenen Nenner ist.

Denn der Multiplicandus wird nach §. 82. mit dem Multiplicans multiplicirt, wenn man erstern mit dem Zähler des letztern multiplicirt §. 59. und mit dem Nenner dividirt §. 60. Dies giebt zum Producte einen Bruch, dessen Zähler das Product der gegebenen Zähler, und

Digitized by Google

und dessen Nenner das Product der gegebenen Nenner ist. Doch kann man auch hiebey die §. 59. 60. angezeigte andre Methode zuweilen zur Abkürzung gebrauchen.

So ist $\frac{9}{14} \cdot \frac{2}{3} = (\frac{9}{14} \cdot 2) : 3 = \frac{9 \cdot 2}{14 \cdot 3} = \frac{9 : 3}{14 : 2}$.

So auch $\frac{10}{11} \cdot \frac{2}{5} = (\frac{10}{11} \cdot 2) : 5 = \frac{10 \cdot 2}{11 \cdot 5} = \frac{(10 : 5) \cdot 2}{11}$.

So auch $\frac{33}{35} \cdot \frac{7}{8} = (\frac{33}{35} \cdot 7) : 8 = \frac{33 \cdot 7}{35 \cdot 8} = \frac{33}{(35 : 7) \cdot 8}$.

§. 84.

Sollen gemischte Zahlen multiplicirt werden: so verwandle man sie nach §. 75. in unächte Brüche.

So ist $(4\frac{2}{3}) \cdot (2\frac{3}{4}) = \frac{14}{3} \cdot \frac{11}{4} = \frac{14 \cdot 11}{3 \cdot 4}$.

§. 85.

Soll eine benannte Zahl mit einem unbenannten Bruche multiplicirt werden: so multiplicire man solche Zahl mit dem Zähler des Bruchs, und dividire das Product mit dem Nenner. §. 82.

VII. Division der Brüche.

§. 86.

Eine Zahl wird mit einem Bruche dividirt, wenn man sie mit dem Zähler des Bruchs dividirt, und den Quotienten mit dem Nenner multiplicirt, das ist, wenn man sie mit dem umgekehrten Bruche multiplicirt. §. 82.

Da der Zähler ein Product des Bruchs in den Nenner ist §. 62: so kann man die gegebene Zahl statt des Bruchs mit dem Zähler dividiren, wenn man den Quo-

Digitized by Google

tienten mit dem Nenner wieder multiplicirt. §. 53. Soll z. E. eine Zahl mit $\frac{3}{4}$ dividirt werden: so dividire man sie mit $\frac{3}{4} \cdot 4$, das ist, mit 3, und multiplire den gefundenen Quotienten wieder mit 4.

§. 87.

Brüche werden mit einander dividirt, wenn man den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt, so daß der Quotient ein Bruch wird, dessen Zähler das Product des Zählers des Dividendus in den Nenner des Divisors, und dessen Nenner das Product des Nenners des Dividendus in den Zähler des Divisors ist.

Denn der Dividendus wird nach §. 86. mit dem Divisor dividirt, wenn man erstern mit dem Zähler des letztern dividirt §. 60. und mit dem Nenner multiplicirt §. 59. Dies giebt zum Quotienten das Product des Dividendus in den umgekehrten Divisor. Doch kann man auch hiebey die §. 60. 59. angezeigte andre Methode zuweilen zur Abkürzung gebrauchen.

So ist $\frac{21}{32} : \frac{3}{8} = (\frac{21}{32} : 3) \cdot 8 = \frac{21}{32} \cdot \frac{8}{3} = \frac{21 \cdot 8}{32 \cdot 3} = \frac{21 : 3}{32 : 8} = \frac{7}{4}$. So auch $\frac{12}{17} : \frac{4}{9} = (\frac{12}{17} : 4) \cdot 9 = \frac{12}{17} \cdot \frac{9}{4} = \frac{(12 : 4) \cdot 9}{17} = \frac{27}{17}$. So auch $\frac{17}{24} : \frac{5}{8} = (\frac{17}{24} : 5) \cdot 8 = \frac{17 \cdot 8}{24 \cdot 5} = \frac{17}{24} \cdot \frac{8}{5} = \frac{17}{(24 : 8) \cdot 5} = \frac{17}{15}$.

§. 88.

Sollen gemischte Zahlen dividirt werden: so verwandle man sie nach §. 75. in unächte Brüche.

So ist $(4\frac{2}{3}) : (2\frac{3}{4}) = \frac{14}{3} : \frac{11}{4} = \frac{14}{3} \cdot \frac{4}{11}$.

§. 89.

Digitized by Google

§. 89.

Soll eine benannte Zahl mit einem unbenannten Bruche dividirt werden: so dividire man die benannte Zahl mit dem Zähler des Bruchs, und multiplicire den Quotienten mit dem Nenner. §. 86.

§. 90.

Sollen benannte Brüche dividirt werden: so reducire man sie auf einerley Namen. §. 66.

§. 91.

Einen irregulären Bruch, dessen Zähler und Nenner eine gebrochene Zahl ist, verwandelt man in einen regulären, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind; wenn man den Zähler mit dem Nenner dividirt, wovon der Grund §. 56.

So ist $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5}$.

VIII. Potenzen und Wurzeln der Brüche.

§. 92.

Die Potenz eines Bruchs entsteht, wenn der Bruch mehrmal in sich selbst multiplicirt wird. Der Bruch heißt alsdenn die Wurzel des daher entstehenden Products. Alles wie bey ganzen Zahlen. §. 35.

§. 93.

Die Potenz eines Bruchs ist daher ein Bruch, dessen Zähler dieselbe Potenz des gegebenen Zählers, und dessen Nenner dieselbe Potenz des gegebenen Nenners ist.

Digitized by Google

So giebt z. E. die Quadratzahl eines Bruchs die Quadratzahl des Zählers und die Quadratzahl des Nenners.

§. 94.

Die Wurzel eines Bruchs ist ebenfalls ein Bruch, dessen Zähler dieselbe Wurzel des gegebenen Zählers, und dessen Nenner dieselbe Wurzel des gegebnen Nenners ist.

So giebt z. E. die Quadratwurzel eines Bruchs die Quadratwurzel des Zählers, und die Quadratwurzel des Nenners.

Digitized by Google

Drittes Kapitel.

Von den Proportionen.

I. Erklärungen.

§. 95.

Zwey Größen sind überhaupt in einer Verhältniß, in so fern die eine aus der andern entstehen kann; insbesondre aber, in so fern die eine das Vielfache der andern, oder eines bestimmten Theils der andern ist; und bey Zahlen, in so fern die eine ein Product der andern in irgend einen Factor ist, welcher alsdenn der Verhältnißname heißt.

In welcher Verhältniß zwey Zahlen sind, erkennt man also aus der Division der einen in die andre, und der daher entstehende Quotient ist der Verhältnißname. Daher kann auch die Verhältniß durch das Zeichen der Division, oder auch wie ein Bruch bezeichnet werden.

§. 96.

Vier Zahlen sind proportionirt, wenn der Verhältnißname des ersten Paares dem Verhältnißnamen des zweyten Paares gleich ist. Oder die Proportion ist die Gleichheit zweyer Verhältnisse oder zweyer Brüche. Die Zahlen selbst heißen die Glieder der Proportion. Das erste und dritte nennt man die Vorderglieder, das zweyte und vierte die Hinterglieder; das erste und vierte die äußern, das zweyte und dritte die mittlern Glieder. Durch gleichnamige Glieder versteht man entweder Vorderglieder, oder Hinterglieder.

Digitized by Google

§. 97.

Eine Proportion heißt abgesondert, *proportio discreta*, deren mittlere Glieder verschieden sind; stetig aber, *proportio continua*, deren mittlere Glieder einerley sind.

§. 98.

Bezeichnet man die Glieder einer Proportion mit den vier ersten Buchstaben des Alphabets, so daß sie ganze sowohl als gebrochene Zahlen anzeigen: so kann man $a : b = c : d$, oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, als die allgemeine Form einer jeden Proportion ansehen, wenn man bey einer stetigen Proportion annimmt, daß $b = c$ sey.

II. Lehrsätze.

§. 99.

Wenn man in einer Proportion die beyden ersten, oder die beyden letzten, oder zwey gleichnamige Glieder mit einerley Zahl multiplicirt, oder dividirt: so bleiben die Glieder noch proportionirt.

Denn ist $a : b = c : d$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Wird nun Zähler und Nenner eines dieser, oder beyder Brüche, oder die Zähler, oder die Nenner, mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt: so bleiben die Brüche noch gleich §. 61. folglich die Zähler und Nenner noch proportionirt. §. 96.

§. 100.

Zwey Proportionen können in eine gebracht werden, wenn man die Glieder, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, mit einander multiplicirt.

Denn

Digitized by Google

Denn es sey $A : B = C : D$, und $a : b = c : d$, so ist $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ und $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. §. 96. Folglich ist auch $\frac{A}{B} \cdot \frac{a}{b} = \frac{C}{D} \cdot \frac{c}{d}$, §. 47, das ist, $\frac{A \cdot a}{B \cdot b} = \frac{C \cdot c}{D \cdot d}$ §. 83; folglich $A \cdot a : B \cdot b = C \cdot c : D \cdot d$, §. 96.

§. 101.

In jeder Proportion ist das Product aus den mittlern Gliedern dem Producte aus den äußern Gliedern, und daher in jeder stetigen Proportion das Quadrat des mittelsten Gliedes dem Producte aus den äußern Gliedern gleich.

Ist $a : b = c : d$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, folglich unter einerley Benennung gebracht $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$ §. 71, folglich §. 47. mit $b \cdot d$ multiplicirt $a \cdot d = c \cdot b$. §. 62. Ist nun, wie in einer stetigen Proportion, $b = c$, so ist $a \cdot d = b \cdot b$.

§. 102.

In jeder Proportion lassen sich die beyden mittlern Glieder mit einander verwechseln.

Denn ist $a : b = c : d$, so ist $a \cdot d = b \cdot c$. §. 101. folglich §. 47. mit $c \cdot d$ dividirt $\frac{a \cdot d}{c \cdot d} = \frac{b \cdot c}{d \cdot c}$; folglich $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ §. 61. folglich $a : c = b : d$. §. 96.

Digitized by Google

§. 103.

In jeder Proportion lassen sich die Glieder umkehren.

Denn ist $a : b = c : d$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, folglich §. 47. mit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dividirt $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}$, §. 87. folglich §. 47. mit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dividirt $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; folglich $b : a = d : c$, §. 96.

III. Aufgaben.

§. 104.

Zu drey Gliedern einer Proportion findet man das vierte, wenn man das Product aus den mittlern Gliedern mit dem ersten Gliede dividirt.

Denn ist $a : b = c : x$, so ist $a \cdot x = b \cdot c$ §. 101, folglich $x = \frac{b \cdot c}{a}$, §. 47.

§. 105.

Zu den beyden äußern Gliedern einer stetigen Proportion findet man das mittelste Glied, wenn man aus dem Producte der äußern Glieder die Quadratwurzel ziehet.

Denn ist $a : x = x : d$, so ist $x \cdot x = a \cdot d$, §. 101. folglich $x = \sqrt{a \cdot d}$, §. 50.

§. 106.

Aus zwey gleichen Producten macht man eine Proportion, wenn man die beyden Factoren des einen Pro-

Digitized by Google

Products zu mittlern, und des andern zu äußern Gliedern macht.

Denn ist $a \cdot d = b \cdot c$, so ist $\frac{a \cdot d}{b} = c$, §. 47, folglich §. 60. $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{c}{d}$, folglich §. 61. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, folglich $a : b = c : d$, §. 96.

§. 107.

Aus jedem Producte macht man eine Proportion, wenn man dasselbe als das vierte Glied zur Einheit und den beyden Factoren ansiehet.

Denn ist $a \cdot b = P$, das ist $a \cdot b = 1 \cdot P$, so ist $1 : a = b : P$. §. 106.

Zusatz. Daher heißt multipliciren, eine Zahl finden, welche aus dem einen Factor so entsteht, als der andre Factor aus der Einheit.

§. 108.

Aus jedem Quotienten macht man eine Proportion, wenn man denselben als das vierte Glied zum Divisor, der Einheit, und dem Dividendus ansieht.

Denn ist $\frac{a}{b} = Q$, so ist $a = b \cdot Q$, §. 47, das ist, $1 \cdot a = b \cdot Q$; folglich $b : 1 = a : Q$, §. 106.

Zusatz. Daher heißt dividiren, eine Zahl finden, welche aus dem Dividendus so entsteht, als die Einheit aus dem Divisor.

Digitized by Google

§. 109.

Jeder Bruch wird in einen ihm gleichen Bruch von beliebigen Nenner verwandelt, wenn man den neuen Zähler als das vierte Glied zum vorigen Nenner, zum vorigen Zähler und zum neuen Nenner ansieht.

Denn es sey $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$, so ist §. 103. $b : a = c : x$.

Z. E. $\frac{3}{7}$ soll in einen Bruch, dessen Nenner 15 sey, verwandelt werden; so ist $5 : 3 = 15 : 9$, das ist, $\frac{3}{7} = \frac{9}{15}$.

Digitized by Google

Zweyter Abschnitt.

Die allgemeine Arithmetik.

1. Von der Buchstabenrechnung.
2. Von den Zahlensystemen.
3. Von den Proportionen.
4. Von den Progreßionen.
5. Von den Logarithmen.

Erstes Kapitel.

Von der Buchstabenrechnung.

I. Allgemeine Bezeichnung der Größen.

§. 1.

Die Buchstaben des Alphabets werden als allgemeine Zeichen unbestimmter Größen gebraucht; und zwar die erstern, a, b, c, u. s. w. für bekannte, die letztern, als x, y, z, für unbekannte Größen. Man bedient sich hiezu vorzüglich der kleinen lateinischen und griechischen Buchstaben.

So ist $a : b = c : x$ eine allgemeine Form für jede Proportion, weil a, b, c, nicht nur alle Zahlen, welche man will, sondern auch jede andre Größen, bedeuten können, und x eine noch unbekannte Größe, welche aber durch die drey ersten bestimmt wird, anzeigt.

§. 2.

Digitized by Google

§. 2.

Werden zwey Größen neben, oder mit dazwischen gezogenen Striche, unter einander gesetzt: so zeigt dies im ersten Falle ihr Product, im zweyten ihren Quotienten an; doch bedient man sich hiezu auch wohl des Multiplications- und Divisionszeichens.

So heißt ab, oder $a \,.\, b$, das Product der Größen a und b, welches entsteht, wenn man a mit b multiplicirt; hingegen $\frac{a}{b}$, oder $a : b$, der Quotient der Größe b in a, welcher entsteht, wenn man a mit b dividirt, oder der Bruch $\frac{a}{b}$. Eben dies bedeutet der Ausdruck $3a$, oder $3 \,.\, a$, und $\frac{a}{3}$, oder $a : 3$, oder der Bruch $\frac{a}{3}$. Daher ist $a = 1 \,.\, a = \frac{a}{1}$, und $\frac{a}{a} = 1$.

§. 3.

Mehrere Größen neben einander gesetzt, oder mit dem Multiplicationszeichen verbunden, bedeuten die Factoren von dem Producte dieser Größen, dabey es auf ihre Ordnung nicht ankommt.

So ist $a \,.\, b \,.\, c \,.\, d = abcd = acdb$ &c. Daher ist $3a \,.\, 4b = 3 \,.\, 4 \,.\, a \,.\, b = 12 \,.\, ab$.

§. 4.

Brüche mit Buchstaben ausgedrückt werden nach den gemeinen Regeln multiplicirt und dividirt, aufgehoben und gleichnamig gemacht.

So ist $\frac{a}{b} \,.\, \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, und $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \,.\, \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$. Auch sind die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, unter einerley

Benen-

Digitized by Google

Benennung gebracht, den Brüchen $\frac{ad}{bd}$ und $\frac{bc}{bd}$ gleich. Daher ist auch $\frac{12 \cdot ab}{4 \cdot b} = 3 \cdot a$.

§. 5.

Sind Größen durch das Additions- oder Subtractionszeichen verbunden, so zeigt dies ihre Summe oder Differenz an.

So ist $a + b$ die Summe der Größen, die man zu einander addiren soll, und $a - b$ die Differenz der Größen, die von einander subtrahirt werden sollen. Daher ist $a + a = 2a$, und $3a + 5a = 8a$, und $7a - 4a = 3a$. Eben so ist $\frac{a}{b} \mp \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \mp \frac{bc}{bd} = \frac{ad \mp bc}{bd}$.

§. 6.

Summen oder Differenzen, welche man mit einander multipliciren, oder dividiren soll, werden durch einen darüber gezogenen Strich verbunden, oder in eine Parenthese eingeschlossen.

So heißt $\overline{a + b} \cdot \overline{a - b}$, oder $(a + b)(a - b)$ das Product der Differenz beyder Größen in ihre Summe; und $\overline{a + b} : \overline{a - b}$, oder $(a + b) : (a - b)$, oder $\frac{a + b}{a - b}$ der Quotient der Differenz beyder Größen in ihre Summe. Demnach ist $3a + 5a = (3 + 5) \cdot a = 8a$, oder allgemein $mx + nx = (m + n)x$, und $\frac{mx + nx}{m + n} = \frac{(m + n)x}{m + n} = x$.

§. 7.

Wird eine Größe mehrmal in sich selbst multiplicirt, so heißt das daher entstehende Product eine Potenz der Größe von dem Grade, welchen der Exponent, das ist, die Anzahl der Factoren, anzeigt; die

die Größe selbst heißt eine Wurzel von eben dem Grade aus diesem Producte, und wird durch $\sqrt{}$ mit eingeschriebenen Exponenten bezeichnet. I. §. 35.

So ist $aaaa = a^4$, und $\sqrt[4]{A} = a$, wenn $a^4 = A$ ist. Oder allgemein $a^n = Z$, wenn Z ein Product aus Factoren a von der Anzahl n ist; folglich $\sqrt[n]{Z} = a$, wenn $a^n = Z$ ist.

§. 8.

Die Summen und Differenzen von Potenzen und Wurzeln, werden, wenn die Größen selbst und ihre Exponenten gleich sind, wie bey gemeinen Grössen abgekürzt. §. 5.

So ist $a^3 + a^3 = 2 \cdot a^3$, und $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x} = 2\sqrt[4]{x}$. Folglich $3a^3 + 5a^3 = (3 + 5)a^3 = 8a^3$, und $3\sqrt{x} + 4\sqrt{x} = 7\sqrt{x}$. So auch $9a^4 - 5a^4 = 4a^4$, und $7\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x} = 3\sqrt[3]{x}$.

Hingegen $5a^4 \mp 3b^4$, und $2a^3 \mp 5a^2$, und $5\sqrt{x} \mp 3\sqrt{y}$, und $7\sqrt[3]{x} \mp 4\sqrt[5]{x}$, können nicht abgekürzt werden, weil entweder die Größen selbst, oder die Exponenten ungleich sind, folglich als Dinge von verschiedner Art weder zusammengezählt, noch von einander weggenommen werden können.

§. 9.

Das Product oder der Quotient zweyer Potenzen einer Größe, ist eine Potenz dieser Größe, deren Exponent im ersten Falle die Summe, im zweyten die Differenz der gegebenen Exponenten ist.

So

Digitized by Google

So ist $a^2 . a^3 = aa . aaa = a^5 = a^{2+3}$, und $\frac{a^5}{a^2} = \frac{aaaaa}{aa} = aaa = a^3 = a^{5-2}$; oder allgemein $a^m . a^n = a^{m+n}$, und $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Daher ist auch $a^2x^3 . a^4x^2 = a^2 . a^4 . x^3 . x^2 = a^6 . x^5$, und $\frac{a^5 x^4}{a^3 x^2} = \frac{a^5}{a^3} . \frac{x^4}{x^2} = a^2 x^2$.

§. 10.

Jede Potenz, deren Exponent 1, ist ihrer Wurzel gleich; jede Potenz, deren Exponent 0, ist der Einheit gleich; und jede Potenz, deren Exponent negativ, ist einem Bruche gleich, dessen Zähler die Einheit, und dessen Nenner dieselbe Potenz mit dem positiven Exponenten ist.

Denn $\frac{x^3}{x^2} = x^1 = x$; und $\frac{x^3}{x^3} = x^0 = 1$; und $\frac{x^2}{x^5} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, oder allgemein $x^{-n} = x^{0-n} = \frac{x^0}{x^n} = \frac{1}{x^n}$. §. 9.

§. 11.

Die Potenz eines Products entsteht, wenn man jeden einzelnen Factor in dieselbe Potenz erhebt, und von diesen Potenzen das Product macht; die Wurzel eines Products entsteht, wenn man aus jedem einzelnen Factor dieselbe Wurzel ziehet, und von diesen Wurzeln das Product macht.

So ist $(ab)^3 = ab . ab . ab = aaa . bbb = a^3 b^3$; und $\sqrt[3]{A . B} = \sqrt[3]{A} . \sqrt[3]{B} = ab$, wenn $a^3 = A$, und $b^3 = B$ ist. Oder allgemein $(abc)^n = a^n . b^n . c^n$; und $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} . \sqrt[n]{y}$. Daher ist auch

auch $(3a)^2 = 9a^2$; und $\sqrt{16A} = 4\sqrt{A} = 4a$, wenn $a^2 = A$ ist.

§. 12.

Die Potenz oder Wurzel eines Quotienten oder Bruchs, ist ein Bruch, dessen Zähler dieselbe Potenz oder Wurzel des gegebenen Zählers, und dessen Nenner dieselbe Potenz oder Wurzel des gegebenen Nenners ist.

So ist $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$; und $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \frac{a}{b}$, wenn $a^2 = A$, und $b^2 = B$ ist. Oder allgemein: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; und $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Daher ist $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$; und $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$.

§. 13.

Potenzen werden zu höhern Graden erhoben, wenn man ihren Exponenten mit dem Exponenten des verlangten Grades multiplicirt.

So ist $(a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^{4+4+4} = a^{12} = a^{4 \cdot 3}$. Oder allgemein: $(a^m)^n = a^{mn}$. Daher ist auch $(x^2 \cdot y^3)^4 = x^8 \cdot y^{12}$. Oder allgemein $(x^m \cdot y^n)^s = x^{ms} \cdot y^{ns}$.

§. 14.

Aus einer Potenz wird die Wurzel von einem gegebenen Grade gezogen, wenn man ihren Exponenten mit dem gegebenen Wurzelexponenten dividirt.

So

So ist $\sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$, weil $(a^4)^3 = a^{12}$.

Oder allgemein $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, weil $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n = x^m$.

Folglich ist $\sqrt[s]{(x^m \cdot x^n)} = \sqrt[s]{x^m} \cdot \sqrt[s]{x^n} = x^{\frac{m}{s}} \cdot x^{\frac{n}{s}}$.

Zusatz. Daher entstehen Potenzen, deren Exponenten Brüche sind, welche das Wurzelzeichen auch entbehrlich machen.

So heißt z. E. $5^{\frac{2}{3}}$ die Cubikwurzel aus 5^2, das ist, aus 25; und $a^{\frac{1}{2}}$ die Quadratwurzel aus a. Daher ist auch $\sqrt{a^5} = a^{\frac{5}{2}} = a^{2\frac{1}{2}} = a^2 \sqrt{a}$; und $\sqrt[3]{a^{10}} = a^{\frac{10}{3}} = a^{3\frac{1}{3}} = a^3 \cdot \sqrt[3]{a}$. §. 9.

§. 15.

Wurzelgrößen werden unter einerley Benennung gebracht, wenn man sie in Potenzen mit gebrochenen Exponenten verwandelt, und diese Exponenten unter einerley Benennung bringt.

Statt $\sqrt[3]{a^2}$ und $\sqrt[4]{b^3}$ kommt $a^{\frac{2}{3}}$ und $b^{\frac{3}{4}}$, oder $a^{\frac{8}{12}}$ und $b^{\frac{9}{12}}$, das ist, $\sqrt[12]{a^8}$ und $\sqrt[12]{a^9}$; wodurch die Wurzeln einerley Exponenten erhalten haben.

Zusatz. Daher entsteht die kürzere Regel: Multiplicire den Exponenten jeder Größe mit dem Wurzelexponenten der andern; so giebt das Product beyder Wurzelexponenten den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten. So erhält man statt $\sqrt[r]{a^m}$ und $\sqrt[s]{a^n}$ die gleichnamigen Wurzeln $\sqrt[rs]{a^{ms}}$ und $\sqrt[rs]{a^{nr}}$.

Digitized by Google

II. Natur entgegengesetzter Größen.

§. 16.

Größen heißen entgegengesetzt, wenn sie, so wie Vermögen und Schuld, einander ganz oder zum Theil aufheben; und zwar heißt die eine, als Vermögen, positiv, die andre, als Schuld, negativ. Die positiven bezeichnet man mit dem Additions- die negativen mit dem Subtractionszeichen. Bey einer einzeln Größe, oder bey der erstern unter mehrern, wird, wenn sie positiv ist, das Zeichen weggelassen.

§. 17.

Die Einheit, welche sowohl positiv als negativ seyn könnte, nimmt man stets als positiv an.

Ist die Einheit positiv, so entstehen alle positive Zahlen aus dem Vielfachen der positiven Einheit; alle negativen Zahlen aber aus dem Vielfachen des der positiven Einheit Entgegengesetzten. Ist die Einheit negativ, so entstehen alle negativen Zahlen aus dem Vielfachen der negativen Einheit; alle positiven Zahlen aber aus dem Vielfachen, des der negativen Einheit Entgegengesetzten. Demnach ist es einerley, ob man die Einheit positiv oder negativ annehme; und man hat das erstere erwählet.

§. 18.

Größen mit einerley Zeichen vermehren einander; aber Größen mit verschiedenen Zeichen vermindern einander ganz oder nur zum Theil, je nachdem sie gleich oder ungleich sind.

So ist $+ 3a$ und $+ 2a = + 5a$, auch $- 3a$ und $- 2a = - 5a$; hingegen $+ a$ und $- a = 0$, aber $+ 5a$ und $- 3a = + 2a$, und $- 5a$ und $+ 3a = - 2a$; wodurch man abgekürzte Ausdrücke erhält.

III. Alk-

Digitized by Google

III. Allgemeine Addition.

§. 19.

Größen addiren heißt, sie zu einander setzen, und den zusammengesetzten Ausdruck, so viel es sich thun läßt, abkürzen.

§. 20.

Sind die summirenden Größen von verschiedener Art, so lassen sie sich blos zu einander setzen, ohne daß der Ausdruck abgekürzt werden könnte.

Soll $+ 3b$ zu $+ 5a$ addirt werden, so erhält man $+ 5a + 3b$, soll man aber $- 3b$ addiren, so erhält man $+ 5a - 3b$.

Zusatz. Um Zweydeutigkeit zu vermeiden, schließt man den Addendus in eine Parenthese ein. So heißt das vorige Beyspiel $+ 5a + (+ 3b) = 5a + 3b$, und $5a + (- 3b) = 5a - 3b$; wobey das Zeichen der Addition von dem Zeichen einer positiven Größe unterschieden ist. Hiernach ist auch $a + (b - c) = a + b - c$.

§. 21.

Sind die summirenden Größen von einerley Art, so suche man ihre Summe, wenn sie einerley Zeichen; ihre Differenz aber, wenn sie verschiedene Zeichen haben. Erstre erhält das gemeinschaftliche Zeichen, letztre das Zeichen des Größern.

Soll $+ 3a$ zu $+ 5a$, oder $- 3a$ zu $- 5a$ addirt werden, so erhält man im ersten Falle $+ 5a + 3a = + 8a$, im zweyten $- 5a - 3a = - 8a$. Soll hingegen $- 3a$ zu $+ 5a$, oder $+ 3a$ zu $- 5a$ addirt werden, so erhält man im ersten Falle $5a - 3a = + 2a$; im zweyten $- 5a + 3a = - 2a$.

Digitized by Google

§. 22.

Bey zusammengesetzten Ausdrücken setzt man die Größen einerley Art unter einander und verfährt nach obigen Regeln. Z. E.

$$3a - 4b^2 - 5\sqrt[3]{c} + 6\frac{d}{e} + 2f - 3\sqrt{x} + 5y^3$$
$$- 5a - 7b^2 + 9\sqrt[3]{c} + 2\frac{d}{e} - 4g + 8\sqrt[3]{x} - 4y^2$$
$$\overline{- 2a - 11b^2 + 4\sqrt[3]{c} + 8\frac{d}{e} + 2f - 3\sqrt{x} + 5y^3 - 4g + 8\sqrt[3]{x} - 4y^2}.$$

§. 23.

Hieraus erhellet auch, wie man Potenzen von negativen oder entgegengesetzten Exponenten mit einander multipliciren müsse. §. 9.

Z. E. $a^{-3} \cdot a^{-2} = a^{-5}$, und $a^7 \cdot a^{-4} = a^3$.

IV. Allgemeine Subtraction.

§. 24.

Größen subtrahiren heißt, sie von einander wegnehmen, welches geschiehet, indem man das Entgegengesetzte des Subtrahendus zu dem Minuendus nach §. 19. addirt.

Soll eine Größe b von einer andern a subtrahirt, das ist, von ihr weggenommen werden: so kann man sich die andre als ein Aggregat von ihr selbst und der ersten Größe, positiv und negativ genommen, das ist, $a = a + b - b$, gedenken. Wird nun $+ b$ weggenommen, so bleibt $a - b$; wird $- b$ weggenommen, so bleibt $a + b$. Demnach wird von a eine Größe $+ b$ oder $- b$ subtrahirt, wenn man zu a in jedem Falle das Entgegengesetzte von b addirt.

§. 25.

Digitized by Google

§. 25.

Sind die Größen von verschiedener Art, so kann man blos das Entgegengesetzte des Subtrahendus zu dem Minuendus setzen, ohne daß sich der Ausdruck abkürzen ließe.

Soll $+ 3b$ von $+ 5a$ subtrahirt werden, so erhält man $5a - 3b$; soll man aber $- 3b$ subtrahiren, so erhält man $5a + 3b$.

Zusatz. Um Zweydeutigkeit zu vermeiden, schließt man den Subtrahendus in eine Parenthese ein. So heißt das vorige Beyspiel $5a - (+ 3b) = 5a - 3b$, und $5a - (- 3b) = 5a + 3b$; wobey das Zeichen der Subtraction von dem Zeichen einer negativen Größe noch unterschieden ist. Hiernach ist auch $a - (b + c) = a - b - c$, aber $a - (b - c) = a - b + c$.

§. 26.

Sind die Größen von einerley Art, so läßt sich der zusammengesetzte Ausdruck abkürzen.

So ist $5a - (+ 3a) = 5a - 3a = 2a$, und $5a - (- 3a) = 5a + 3a = 8a$.

§. 27.

Bey zusammengesetzten Ausdrücken setze man, was von einerley Art ist, unter einander, und addire die Größen der untern Reihe mit ihren entgegengesetzten Zeichen zu den Obern. §. 22. Z. E.

$$3a - 4b^2 - 5\sqrt[3]{c} + 6\frac{d}{e} + 2f - 3\sqrt{x} + 5y^3$$
$$- 5a - 7b^2 + 9\sqrt[3]{c} + 2\frac{d}{e} - 4g + 8\sqrt[3]{x} - 4y^2$$

$$8a + 3b^2 - 14\sqrt[3]{c} + 4\frac{d}{e} + 2f - 3\sqrt{x}$$
$$+ 5y^3 + 4g - 8\sqrt[3]{x} + 4y^2.$$

Digitized by Google

§. 28.

Hieraus erhellet auch, wie man Potenzen von negativen oder entgegengesetzten Exponenten mit einander dividiren müsse.

Z. E. $\frac{a^{-4}}{a^{-6}} = a^{2}$, und $\frac{a^{-4}}{a^{6}} = a^{-10}$. §. 9. 19.

V. Allgemeine Multiplication.

§. 29.

Größen multipliciren heißt eine Größe finden, welche aus dem einen Factor eben so entsteht, als der andre Factor aus der Einheit. Daher erhält das Product, wenn die Factoren einerley Zeichen haben, das positive Zeichen; wenn sie verschiedene Zeichen haben, das negative Zeichen.

Hiernach wäre z. E. $+3 \cdot +4 = +12$, und $-3 \cdot -4 = +12$; hingegen $+3 \cdot -4 = -12$, und $-3 \cdot +4 = -12$. Denn da die Einheit stets positiv ist, so ist

1) $+1 : +3 = +4 : +12$, das ist, das Positive zum Positiven, wie das Positive zum Positiven. Oder addirt man $+1$ dreymal zu sich selbst, so entsteht $+3$; addirt man $+4$ dreymal zu sich selbst, so entsteht $+12$. Demnach ist $+12$ aus $+4$ eben so entstanden, als $+3$ aus $+1$. Folglich ist $+3 \cdot +4 = +12$, oder allgemein $+a \cdot +b = +ab$.

2) $+1 : -3 = -4 : +12$, das ist, das Positive zu seinem Entgegengesetzten, wie das Negative zu seinem Entgegengesetzten. Oder, addirt man das Entgegengesetzte von $+1$, das ist -1 dreymal zu sich selbst, so entsteht -3, addirt man das Entgegengesetzte von -4, das ist $+4$ dreymal zu sich selbst, so entsteht $+12$. Dem-

Digitized by Google

Demnach entsteht + 12 aus — 4 eben so, als — 3 aus + 4. Folglich ist — 3 . — 4 = + 12, oder allgemein — a . — b = + ab.

3) + 1 : + 3 = — 4 : — 12, aus ähnlichen Gründen. Daher ist + 3 . — 4 = — 12, oder allgemein + a . — b = — ab.

4) + 1 : — 3 = + 4 : — 12, aus ähnlichen Gründen. Daher ist — 3 . + 4 = — 12, oder allgemein — a . + b = — ab.

§. 30.

Sollen zusammengesetzte Größen multiplicirt werden, so ist das gesammte Product die Summe der einzelnen Producte aus dem Multiplicandus in jeden Theil des Multiplicators.

So ist $(a+b)\,c = c\,(a+b) = ac + bc$, folglich $(a+b)(c+d) = (a+b)\,c + (a+b)\,d$.

Man setze daher die gegebenen Factoren unter einander, multiplicire den ersten Factor nach und nach mit jedem Theile des andern, und addire die gefundenen Producte. Z. E.

$y^2 + 2ay - \frac{1}{2}a^2$

$y^2 - 2ay + a^2$

$y^4 + 2ay^3 - \frac{1}{2}a^2y^2 = (y^2 + 2ay - \frac{1}{2}a^2) \cdot y^2$

$- 2ay^3 - 4a^2y^2 + a^3y = (y^2 + 2ay - \frac{1}{2}a^2) \cdot (-2ay)$

$+ a^2y^2 + 2a^3y - \frac{1}{2}a^4 = (y^2 + 2ay - \frac{1}{2}a^2) \cdot a^2$

$y^4 \quad - 3\frac{1}{2}a^2y^2 + 3a^3y - \frac{1}{2}a^4$

§. 31.

Ein aus verschiedenen Potenzen zweyer Größen zusammengesetztes Product wird geordnet, wenn die einzelnen Glieder so neben einander gestellet werden,

Digitized by Google

wie sie bey der einen Größe nach der Zunahme, bey der andern nach der Abnahme ihrer Exponenten auf einander folgen, wobey man die fehlenden Stellen mit einem (*) zu bezeichnen pflegt.

So ist das vorher gefundene Product §. 30. nach den Potenzen der y und a geordnet: $y^4 * - \frac{7}{2} a^2 y^2 + 3 a^3 y - \frac{1}{2} a^4$, wo die Exponenten von y ab, und die Exponenten von a zunehmen.

§. 32.

Hieraus erhellet auch, wie man Potenzen zu höhern Graden erheben müsse, wenn die gegebenen Exponenten negativ oder entgegen gesetzt sind.

So ist $(a^{-\frac{2}{3}})^3 = a^{-6}$, oder $(a^2)^{-3} = a^{-6}$; hingegen $(a^{-2})^{-3} = a^6$, so wie $(a^2)^3 = a^6$, §. 13. 29.

VI. Allgemeine Division.

§. 33.

Größen dividiren heißt eine Größe finden, welche aus dem Dividendus eben so entsteht, als die Einheit aus dem Divisor. Daher erhält der Quotient, wenn die gegebnen Größen einerley Zeichen haben, das positive Zeichen; wenn sie verschiedne Zeichen haben, das negative Zeichen.

Hiernach wäre z. E. $\frac{+12}{+3} = +4$, und $\frac{-12}{-3} = +4$; hingegen $\frac{-12}{+3} = -4$, und $\frac{+12}{-3} = -4$. Denn da die Einheit durchgängig positiv angenommen wird, so ist

1) $+3 : +1 = +12 : +4$, das ist, das Positive zum Positiven, wie das Positive zum Positiven.

Oder

Digitized by Google

Oder, theilt man die + 3 in drey Theile, so ist ein solcher Theil + 1; theilt man + 12 in drey Theile, so ist ein solcher Theil + 4. Demnach entsteht + 4 aus + 12 eben so, als + 1 aus + 3. Folglich ist $\frac{+12}{+3} = +4$, oder allgemein $\frac{+ab}{+a} = +b$.

2) — 3 : + 1 = — 12 : + 4, das ist, das Negative zu seinem Entgegengesetzten, wie das Negative zu seinem Entgegengesetzten. Oder, theilt man das Entgegengesetzte von — 3, das ist + 3 in drey Theile, so entsteht + 1; theilt man das Entgegengesetzte von — 12, das ist + 12 in drey Theile, so entsteht + 4. Demnach ist + 4 aus — 12 eben so entstanden, als + 1 aus — 3. Folglich ist $\frac{-12}{-3} = +4$, oder allgemein $\frac{-ab}{-a} = +b$.

3) + 3 : + 1 = — 12 : — 4, aus ähnlichen Gründen. Daher ist $\frac{-12}{+3} = -4$, oder allgemein $\frac{-ab}{+a} = -b$.

4) — 3 : + 1 = + 12 : — 4, aus ähnlichen Gründen. Daher ist $\frac{+12}{-3} = -4$, oder allgemein $\frac{+ab}{-a} = -b$.

§. 34.

Sollen zusammengesetzte Größen dividirt werden, so ist der gesamte Quotient, die Summe der einzelnen Quotienten des Divisors in die ihm zugehörigen Theile des Dividendus.

So ist $\frac{ab+ac}{a} = \frac{ab}{a} + \frac{ac}{a} = b + c$, folglich $\frac{ac+bc+ad+bd}{a+b} = \frac{ac+bc}{a+b} + \frac{ad+bd}{a+b} = c + d$. Man ordne daher den gegebnen Dividen-

Digitized by Google

dus nach den Theilen des Divisors §. 31. und suche die einzelnen Quotienten. Z. E.

$$
\begin{array}{l|l}
a-b)\ a^3-a^2b+2a^2c-3abc+b^2c & a^2+2ac-bc \\
\quad a^3-a^2b & \\
\hline
\quad 0\quad 0+2a^2c-3abc+b^2c & \\
\quad +2a^2c-2abc & \\
\hline
\quad 0\quad -abc+b^2c & \\
\quad -abc+b^2c & \\
\hline
\quad 0\quad 0 &
\end{array}
$$

§. 35.

Ist der Divisor kein Factor des Dividendus, so erhält der Quotient die Form eines Bruchs; oder kann durch eine Reihe von Brüchen ohne Ende dargestellt werden.

Sollte z. E. a mit $b+c$ dividirt werden, so wäre der Quotient $\frac{a}{b+c}$. Nach der Analogie aber kann man auch folgendermaßen verfahren:

$$
\begin{array}{l|l}
b+c)\ a & \frac{a}{b}-\frac{ac}{b^2}+\frac{ac^2}{b^3}-\frac{ac^3}{b^4}\cdots \\
\quad a+\frac{ac}{b} & \\
\hline
\quad 0-\frac{ac}{b} & \\
\quad -\frac{ac}{b}-\frac{ac^2}{b^2} & \\
\hline
\quad 0+\frac{ac^2}{b^2} & \\
\quad +\frac{ac^2}{b^2}+\frac{ac^3}{b^3} & \\
\hline
\quad 0-\frac{ac^3}{b^3}\ \text{u. s. w.} &
\end{array}
$$

§. 36.

Digitized by Google

§. 36.

Hieraus erhellet auch, wie man aus Potenzen Wurzeln ziehen müsse, wenn die gegebnen Exponenten negativ oder entgegen gesetzt sind.

So ist $\sqrt[-3]{a^{-3}} = a^{-\frac{3}{2}} = a^{-\frac{3}{2}}$, und $\sqrt[-2]{a^3} = a^{-\frac{3}{2}}$ $= a^{-\frac{3}{2}}$; hingegen $\sqrt[-2]{a^{-3}} = a^{-\frac{3}{2}} = a^{+\frac{3}{2}}$. §. 14. 33.

VII. Allgemeines Potenziren.

§. 37.

Eine Größe, die aus zwey Theilen besteht, welche durch Addition oder Subtraction mit einander verbunden sind, heißt ein **Binomium**. Die Potenz eines **Binomiums** ist ein Product, worinn das Binomium als Factor so vielmal vorkommt, als der Exponent dieser Potenz Einheiten enthält.

So entsteht die zweyte, dritte, vierte Potenz, und so weiter alle übrige Potenzen von $a + b$ oder von $a - b$ auf folgende Art:

$a + b$	$a - b$
$a + b$	$a - b$
II. $a^2 + 2ab + b^2$	II. $a^2 - 2ab + b^2$
$a + b$	$a - b$
III. $a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$	III. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a + b$	$a - b$
IV. $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2$	IV. $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2$
$+ 4ab^3 + b^4$	$- 4ab^3 + b^4$
u. s. w.	u. s. w.

§. 38.

§. 38.

Eine Größe, die aus mehr als zwey mit einander verbundnen Theilen besteht, heißt ein Multinomium. Ihre Potenzen entstehen auf eben die Art. Z. E.

$$\begin{array}{l} a+b+c \\ a+b+c \\ \hline a^2+ab+ac \\ \quad +ab \quad +b^2+bc \\ \quad\quad +ac \quad +bc+c^2 \\ \hline \text{II. } a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad a+b+c \\ \hline a^3+2a^2b+2a^2c+ab^2+2abc+ac^2 \\ \quad +a^2b \quad +2ab^2+2abc \quad +b^3+2b^2c+bc^2 \\ \quad\quad +a^2c \quad +2abc+2ac^2 \quad +b^2c+2bc^2+c^3 \\ \hline \text{III. } a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3 \end{array}$$

u. s. w.

§. 39.

Jede Potenz einer multinomischen Größe läßt sich auch nach der Potenz eines Binomiums formiren, wenn man die erstern Theile der multinomischen Größe als den ersten, den letzten aber als den zweyten Theil des Binomiums ansieht. Z. E.

I. $(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$, das ist,

$$\begin{array}{ll} (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 & \\ 2(a+b)c = & 2ac+2bc \\ c^2 = & c^2 \\ \hline (a+b+c)^2 = a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 & \end{array}$$

II.

II. $(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2 c + 3c^2(a+b) + c^3$,
das ist,

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3b^2 a + b^3$
$3c(a+b)^2 = 3c(a^2 + 2ab + b^2) = 3a^2 c + 6abc + 3b^2 c$
$3c^2(a+b) = 3c^2 a + 3c^2 b$
$c^3 = c^3$

$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3b^2 a + b^3 + 3a^2 c +$
$6abc + 3b^2 c + 3c^2 a + 3c^2 b + c^3$
u. s. w.

§. 40.

Die Binomische Regel, oder kurz das Binomium, ist eine allgemeine Formel für jede Potenz n einer binomischen Größe $a + b$; nach welcher $(a+b)^n =$

$$a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 \ldots.$$

Auf dem vorher angezeigten Wege lassen sich alle Potenzen einer binomischen oder multinomischen Größe, eine aus der andern herleiten. Weil aber hiebey jede höhere Potenz die vorhergehende, und daher alle vorhergehenden voraus setzt, so entstand die Frage: ob man nicht jede Potenz einer zusammengesetzten Größe auch außer der Ordnung ohne Hülfe der vorhergehenden finden könne? Man fand auch aus Betrachtung der möglichen Versetzungen und Verbindungen mehrerer Dinge, oder durch die Lehre von der **Permutation** und **Combination**, das Gesetz, welches man beym Potenziren befolgen mußte, und leitete hieraus Regeln, die zu solchem Endzweck führten. Diese Regeln schränkte man auf binomische Grössen ein, auf welche sich auch die multinomischen zurückführen lassen §. 39: und so entstand die oben angezeigte binomische Formel, von deren Richtigkeit man sich vorläufig durch Vergleichung mit §. 37 versichern kann.

Zusatz.

Digitized by Google

Zusatz. Statt dieser Formel können auch zwey andere, die erste für positive, die zweyte für negative Exponenten, gebraucht werden. Denn es ist auch

$$1)\ (a+b)^n =$$

$$a^n\left(1+\frac{n}{1}\cdot\frac{b}{a}+\frac{n.n-1}{1.2}\cdot\frac{b^2}{a^2}+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\ldots.\right)$$

$$2)\ (a+v)^n =$$

$$a^n\left(1+\frac{n}{1}\cdot\frac{v}{a+v}+\frac{n.n+1}{1.2}\cdot\frac{v^2}{(a+v)^2}+\frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}\cdot\frac{v^3}{(a+v)^3}\ldots\right)$$

VIII. Allgemeines Extrahiren.

§. 41.

Die Quadratwurzel aus einer zusammengesetzten Größe extrahirt man nach der Formel §. 37. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, wenn man die Wurzel a aus der höchsten Potenz a^2 als den ersten Theil der gesuchten Wurzel ansieht, durch die Division mit $2a$ den zweyten Theil b sucht, und $(2a+b)\,b$ subtrahirt. Siehet man alsdenn die gefundenen beyden Theile als den ersten an, so findet man auf eben die Art durch die Division mit $2(a+b)$ den dritten Theil c, u. s. w.

Die Art der Operation läßt sich am kürzesten in Beyspielen zeigen, wie folgt

I. $\sqrt{(x^2+mx+\frac{1}{4}m^2)} = x+\frac{1}{2}m$. Denn

$$\begin{array}{r|l} x^2+mx+\frac{1}{4}m^2 & x+\frac{1}{2}m \\ \hline x^2 & \\ \hline 2x)\ 0+mx+\frac{1}{4}m^2 & \\ \quad +mx+\frac{1}{4}m^2 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

Digitized by Google

II. $\sqrt{(x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{4}nm + \frac{1}{16}n^2)} = x + \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}n$. Denn

$$\begin{array}{l|l}
x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{4}nm + \frac{1}{16}n^2 & x + \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}n \\
\underline{x^2} & \\
2x) \quad 0 + mx + \frac{1}{4}m^2 & \\
\underline{+ mx + \frac{1}{4}m^2} & \\
2x + m) \quad 0 \quad 0 + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{4}nm + \frac{1}{16}n^2 & \\
\underline{+ \frac{1}{2}nx + \frac{1}{4}nm + \frac{1}{16}n^2} & \\
0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

§. 42.

Die Cubikwurzeln, und so auch die folgenden Wurzeln könnten nach den dazu gehörigen Potenzen des Binomiums $(a + b)$ §. 47. auf eben diesem Wege extrahirt werden; aber die Rechnung ist weitläuftig und beschwerlich. Dagegen kann die Binomische Formel §. 40. für jede Wurzel gebraucht werden, wenn man darinn statt n, den zu der verlangten Wurzel nach §. 14. gehörigen Bruch setzt. Auch wird im Folgenden gezeigt werden, wie man hiezu logarithmische Rechnungen anwenden kann.

IX. Irrationalgrößen.

§. 43.

Jede Potenz einer ganzen Zahl ist eine ganze Zahl; und jede Potenz eines eigentlichen Bruchs ist ein eigentlicher Bruch.

Ist a eine ganze Zahl, so ist offenbar $a^n = aaaa \ldots$ auch eine ganze Zahl. Ist $\frac{a}{b}$ ein ächter Bruch, wo $a < b$, folglich $a^n < b^n$, so ist offenbar $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ auch

Digitized by Google

auch ein ächter Bruch. Ist $\frac{a}{b}$ ein unächter aber eigentlicher Bruch, dessen Zähler und Nenner Producte aus ungleichen Primzahlen sind, so daß $\frac{a}{b} = \frac{c \cdot d \cdot e \ldots}{f \cdot g \cdot h \ldots}$: so ist offenbar $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{c^n \cdot d^n \cdot e^n \ldots}{f^n \cdot g^n \cdot h^n \ldots}$, folglich ein Bruch, wo jeder einfache Factor im Zähler und Nenner, bey der zweyten Potenz zweymal, bey der dritten dreymal, bey der $n$ten $n$mal vorkommt, ohne daß jemals einige Factoren des Nenners, vielweniger alle, in den Factoren des Zählers aufgingen. Demnach wird $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ niemals eine ganze Zahl werden, sondern, weil $a^n > b^n$, immer ein unächter, aber eigentlicher, Bruch bleiben.

§. 44.

Ist die Wurzel einer ganzen Zahl größer als eine ganze Zahl x, aber kleiner als diese ganze mit der Einheit vermehrt, $x + 1$: so ist solche Wurzel weder eine ganze Zahl, noch ein Bruch, und heißt eine Irrationalgröße, die sich durch gar keine Zahl genau ausdrucken läßt, und weder die Einheit, noch irgend einen Theil der Einheit zum Maaße hat. I. §. 21.

Da diese Wurzel $> x$ und $< x + 1$, also zwischen x und $x + 1$ fällt, so kann sie offenbar keine ganze Zahl seyn. Wäre sie nun ein Bruch, so müßte die Potenz dieses Bruchs, die mit der Wurzel gleichen Exponenten hat, der gegebenen Zahl gleich, und daher eine ganze Zahl seyn, welches nach §. 43. unmöglich ist. Demnach ist sie irrational. So ist z. E. $\sqrt{5} > 2$ und < 3, folglich irrational.

§. 45.

Digitized by Google

§. 45.

Alle solche Irrationalgrößen werden mit dem Wurzelzeichen belegt; aber nicht alle Wurzelgrößen, sondern nur diejenigen sind irrational, die sich nicht von dem Wurzelzeichen befreyen lassen, das ist, aus denen die verlangte Wurzel nicht genau gezogen werden kann.

Daher ist a, $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[n]{a^n}$, es sey nun a eine ganze Zahl oder ein Bruch, rational; aber $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{(a+b)}$ so lange irrational, bis für a, und $a+b$ solche Zahlen gesetzt werden können, aus denen sich die verlangte Wurzel genau ziehen läßt.

§. 46.

Ist das Quadrat einer Irrationalgröße rational: so sind alle gerade Potenzen derselben auch rational; alle ungerade aber irrational.

Es sey a rational, und $\sqrt{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ irrational, auch bedeute n eine ganze Zahl, folglich $2n$ eine gerade, und $2n+1$ eine ungerade Zahl: so ist $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a$, folglich rational, und $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{2n} = a^n$, folglich rational; hingegen $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{2n+1} = a^n \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^n \cdot \sqrt{a}$, folglich irrational.

§. 47.

Läßt sich eine Größe, deren Wurzel irrational ist, in Factoren zerlegen, so daß sich aus irgend einem solcher Factoren die gegebene Wurzel genau ziehen läßt: so kann man den Ausdruck von seiner Irrationalität zum Theil befreyen.

Digitized by Google

So ist $\sqrt{28} = \sqrt{(4 \cdot 7)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$, und $\sqrt{63} = \sqrt{(9 \cdot 7)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$. Daher ist $\sqrt{63} \mp \sqrt{28} = 3\sqrt{7} \mp 2\sqrt{7} = (3 \mp 2) \cdot \sqrt{7}$.

Eben so ist $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$, und $\sqrt[3]{2560} = \sqrt[3]{512 \cdot 5} = \sqrt[3]{512} \cdot \sqrt[3]{5} = 8 \cdot \sqrt[3]{5}$. Daher ist $\sqrt[3]{2560} \mp \sqrt[3]{40} = 8\sqrt[3]{5} \mp 2\sqrt[3]{5} = (8 \mp 2) \cdot \sqrt[3]{5}$.

X. Unmögliche oder eingebildete Größen.

§. 48.

Von jeder positiven Größe sind alle Potenzen positive Größen; von jeder negativen Größe aber sind alle gerade Potenzen positive, alle ungerade negative Größen.

Bey der zweyten und dritten Potenz ist der Satz an sich klar. §. 29. Jede andre gerade Potenz kann als ein Product von Quadratgrößen, das ist, von lauter positiven Factoren angesehen werden, und giebt daher ein positives Product. Jede andre ungerade Potenz kann als ein Product von Quadratgrößen in die Wurzelgröße angesehen werden, und ist daher bey positiven Wurzelgrößen positiv, bey negativen aber negativ; weil im ersten Falle beyde Factoren positiv sind, im zweyten Falle aber der eine positiv, der andre negativ ist. §. 29.

§. 49.

Jede gerade Wurzel aus einer positiven Größe kann sowohl positiv, als negativ seyn; jede ungerade Wurzel aber aus einer positiven Größe kann nur positiv, aus einer negativen nur negativ seyn; jede gerade

Digitized by Google

rade Wurzel hingegen aus einer negativen Größe kann weder positiv noch negativ seyn, und heißt daher unmöglich oder eingebildet.

Macht man von der Wurzel diejenige Potenz, welche der Exponent der Wurzel verlangt: so entsteht im ersten Falle allemal eine positive Größe, die Wurzel mag positiv oder negativ seyn; im zweyten Falle aber nur eine positive oder negative Größe, je nachdem die Wurzel positiv oder negativ ist; im dritten Falle hingegen niemals eine negative Größe, man mag die Wurzel positiv oder negativ nehmen. §. 48.

Digitized by Google

Zweytes Capitel.

Von den Zahlensystemen.

I. Natur der Zahlensysteme.

§. 50.

Eine allgemeine Form, unter welche jede auch noch so verschiedene Zahlenreihe gebracht werden kann, heißt eine allgemeine Zahlenreihe, dergleichen:

$hx^{+n}, \ldots dx^{+3}, cx^{+2}, bx^{+1}, ax^{0}, bx^{-1}, cx^{-2}, dx^{-3} \ldots hx^{-n}$

oder kürzer:

$$\overset{+n}{h} \ldots \overset{+3}{d}, \overset{+2}{c}, \overset{+1}{b}, \overset{0}{a}, \overset{-1}{b}, \overset{-2}{c}, \overset{-3}{d}, \ldots \overset{-n}{h}.$$

Diese Zahlenreihe entsteht, indem man eine unbestimmte Größe x, nach der Ordnung wie die positiven und negativen Exponenten von Null an zu beyden Seiten auf einander folgen, in ihre verschiedenen Potenzen erhebt, und solche mit unbestimmten einfachen Größen, a, b, c u. s. w. multiplicirt.

In der zweyten Form bedeuten daher die Buchstaben a, b, c, d u. s. w. die Anzahl der Einheiten bey jeder Potenz der gemeinschaftlichen Größe x; die überschriebnen Zahlen aber zeigen die Exponenten dieser Potenzen, oder die Ordnungen solcher Einheiten an; und zwar die positiven die höherern, die negativen die niedrern Ordnungen.

§. 51.

Giebt man in solcher allgemeinen Zahlenreihe der gemeinschaftlichen Größe x einen bestimmten Werth: so

so entsteht daraus, je nachdem dieser Werth verschieden ist, auch ein verschiedenes Zahlensystem; und solcher Werth der gemeinschaftlichen Größe x heißt alsdenn die Basis dieses Systems.

So giebt $x = 2$, die Diadik; $x = 4$, die Tetradik; $x = 10$ das Decimalsystem oder die Decadik; $x = 12$, das Duodecimalsystem oder Dodecadik; $x = 60$, das Sexagesimalsystem. u. s. w.

II. Decadisches Zahlensystem.

§. 52.

Werden in einer Reihe neben einander gesetzter Ziffern, die einzelnen Ziffern als Producte derselben in die verschiednen Potenzen der Zahl Zehn angesehen: so gehört solche Reihe zu dem decadischen Zahlensystem. Z. E.

+4	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3	-4
3	5	7	8	6	4	3	2	5

§. 53.

Schneidet man in solcher Reihe die Ziffer, welche ihr Product in 10^0 bedeutet, durch ein Comma von den übrigen ab: so läßt sich der Werth einer jeden Ziffer bloß durch die Stelle bestimmen, die sie nach den Rechten oder Linken zu einnimmt, und das dabey gebrauchte Comma heißt alsdenn das Decimalzeichen. Hiedurch wird die Reihe §. 52. in diese gleich bedeutende verwandelt:

35786,4325

§. 54.

Bedeutet in dieser Reihe die durch das Decimalzeichen abgeschnittene Ziffer einfache oder primitive

Einheiten: so bedeuten die Ziffern nach der Linken zusammengesetzte Einheiten, oder Einheiten höherer Ordnungen; die nach der Rechten aber getheilte Einheiten, oder Einheiten niedrer Ordnungen, welche auch Decimalbrüche, deren Nenner eine Potenz der Zehn ist, genannt werden.

Hiernach heißen die Einheiten

höhere Ordnung	niedrere Ordnung
der 1sten. Zehner	Zehntel
2ten. Hunderte	Hundertel
3ten. Tausende	Tausendtel
4ten. Zehntausende	Zehntausendtel
5ten. Hunderttausende	Hunderttausendtel
6ten. Millionen	Milliontel
7ten. Zehnmillionen	Zehnmilliontel
12ten. Billionen.	Billiontel

u. s. w.

Denn da $x^0 = 10^0 = 1$, so bedeuten $\overset{0}{a}$ Einer, oder primitive Einheiten. Da $10^1 = 10$, so bedeuten $\overset{+1}{b}$ Zehner, oder Einheiten der ersten höhern Ordnung. Da $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$, so bedeuten $\overset{+2}{c}$ Hunderte, oder Einheiten der zweyten höhern Ordnung, u. s. w.

Eben so, da $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$, so bedeuten $\overset{-1}{b}$ Zehntel, oder Einheiten der ersten niedrern Ordnung. Da $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$, so bedeuten $\overset{-2}{c}$ Hundertel, oder Einheiten der zweyten niedrern Ordnung, u. s. w.

§. 55.

Wird in einer solchen Reihe das Decimalzeichen nicht versetzt, so bleibt die Zahl unverändert, man mag

man ihr vorn oder hinten so viel Nullen als man will beyfügen; wird aber das Decimalzeichen nach der Rechten oder Linken um 1, 2, 3, u. s. w. Stellen versetzt, so wird die Zahl 10, 10, 100 u. s. w. mahl im ersten Falle vergrößert, im zweyten verkleinert.

Denn in solcher Reihe ist jede Ziffer nach der linken zehnmal größer, als die nächst vorhergehende, so daß zehn Einheiten jeder vorhergehenden eine Einheit der nächst folgenden ausmachen. §. 53.

§. 56.

Eine solche Reihe Ziffern wird entweder nach dem Werthe jeder einzelnen Ziffer, oder nach dem Werthe der letzten Ziffer zur Rechten ausgesprochen.

Z. E. 325,0 heißt 3 Hunderte, 2 Zehner, 5 Einer, 0 Zehntel, das ist, dreyhundert fünf und zwanzig Ganze, kein Zehntel; oder dreytausend zweyhundert und funfzig Zehntel.

Eben so heißt 0,743 entweder 7 Zehntel, 4 Hundertel, 3 Tausendtel; oder siebenhundert drey und vierzig Tausendtel.

§. 57.

Die Addition und Subtraction ist bey den Decimalbrüchen, wie bey den ganzen Zahlen, I. §. 7. 10. wie an sich klar ist.

Ein Exempel der Addition sey:

357,6432
0,9785
38,0026
396,6243

Digitized by Google

Ein Exempel der Subtraction sey:

5209,2027
2372,9534
2836,2493

§. 58.

Die Multiplication geschiehet gleichfalls wie mit ganzen Zahlen I. §. 13, nur daß in dem gefundenen Producte so viel Stellen durch das Decimalzeichen abgeschnitten werden, als in beyden Factoren zusammen durch dasselbe abgeschnitten sind. Z. E.

35,78 63
2,25
178 93 15
715 72 6
7157 26
80,5191 75

Der Beweiß dieses Verfahrens läßt sich an einem solchen Beyspiele am leichtesten übersehen. Der Werth des ersten Factors, nach der letzten Ziffer zur Rechten bestimmt, ist $357863 . 10^{-4}$, des zweyten $225 . 10^{-2}$ §. 56. Folglich §. 23. das Product $= 357863 . 225 . 10^{-4} . 10^{-2} = 80519175 . 10^{-6} = 80,519175$. §. 53.

§. 59.

Die Division geschieht ebenfalls wie mit ganzen Zahlen I. §. 16, nur daß, je nachdem im Dividendus oder im Divisor mehrere Decimalstellen abgeschnitten sind, im ersten Falle in dem gefundenen Quotienten so viel Decimalstellen abgeschnitten worden, als der Ueberschuß im Dividendus beträgt; im zweyten Falle aber dem Quotienten so viele Nullen ange-

Digitized by Google

angehängt werden, als der Ueberschuß im Divisor beträgt. Z. E.

0,24)0,03264|0,136	0,024)326,4|13600
24	24
86	86
72	72
144	144
144	144
0	0

Der Beweiß ist eben so wie bey der Multiplication. Das erste Exempel ist

$\frac{3264 \cdot 10^{-5}}{24 \cdot 10^{-2}} = \frac{3264}{24} 10^{-3} = 136 \cdot 10^{-3} = 0,136$. §. 28.

Das zweyte Exempel ist $\frac{3264 \cdot 10^{-1}}{24 \cdot 10^{-3}} = \frac{3264}{24} \cdot 10^{+2}$

$= 136 \cdot 10^{+2} = 13600$. §. 28. Wären daher im Divisor und Dividendus gleich viele Stellen abgeschnitten, so bliebe der Quotient ungeändert.

§. 60.

Durch Hülfe dieser Rechnungsart, läßt sich bey jeder Division, wobey ein Rest bleibt, der Quotient durch Decimalbrüche ausdrücken, wenn man dem Reste, nachdem man ihn mit dem Decimalzeichen belegt hat, so viel Nullen als man für nöthig findet, anhängt, und die Division fortsetzt. Z. E.

7) 34	4,857 . . . .
28	
6,0	
56	
40	
35	
50	
49	
1 u. s. w.	

§. 61.

Dieser Vortheil findet auch beym Extrahiren der Wurzel statt, daß man einer Zahl, die mit dem Decimalzeichen belegt ist, nach Belieben Nullen beyfügt; nur muß bey Abtheilung solcher Zahl I. §. 39, der Strich durch das Decimalzeichen gehen, um hiernach den Werth der Wurzel zu bestimmen. Es werde z. E. $\sqrt{35{,}786}$ verlangt, so ist die Operation diese:

35,|78|60|5,986 . . .
25
10) 10 78
9 81
118) 97 60
89 44
1196) 8 16 00
7 05 96
1 10 04 u. s. w.

III. Sexagesimalsystem.

§. 62.

Eine Zahl, die man als ein Product derselben in eine Potenz der Zahl 60 ansiehet, ist eine Sexagesimalzahl; und insbesondre ein Sexagesimalbruch, wenn der Exponent einer solchen Potenz negativ ist.

§. 63.

Die Rechnungsarten mit Sexagesimalzahlen sind wie die mit benannten Zahlen, wobey man auch, wenn die gefundene Zahl Einheiten einer höhern Klasse in sich faßt, solche durch die Division mit der Zahl 60 reduciren muß; doch hat man, solche Reduction

zu

Digitized by Google

zu ersparen, auch eigene Tabellen, dergleichen in Hausens elem. math.

Ein Exempel der Addition sey:

+1	0	−1	−2
34	05	18	23
18	12	54	14
52	18	12	37

Ein Exempel der Subtraction sey:

+1	0	−1	−2
52	18	12	37
18	12	54	14
34	05	18	23.

Ein Exempel der Multiplication sey:

+1		0		−1
05	+	12	+	04
		−1		−2
		04	+	03
−1		−2		−3
15	+	36	+	12
0				
20	+	48	+	16
0		−1		−2		−3
21	+	03	+	52	+	12

Ein Exempel der Division sey:

−2	−1	+1		0		−1
16)	33	02	+	03	+	45
	32					
		−2				
	1 =	60				
		48				
				−3		
		12 =		720		
				720		
				0		

Drit-

Drittes Kapitel.

Von den Proportionen.

I. Natur der Proportion.

§. 64.

Zwey Größen sind überhaupt in einer **Verhältniß**, in so fern die eine aus der andern entstehen kann; insbesondre aber in einer arithmetischen Verhältniß, in so fern die eine aus der andern durch Addition oder Subtraction einer dritten Größe entstehet, und in einer geometrischen Verhältniß, in so fern die eine aus der andern durch Multiplication oder Division mit einer dritten Größe entstehet. Beyde Größen heißen die **Glieder** der Verhältniß, die erste das **Vorderglied**, die zweyte das **Hinterglied**. Der Verhältnißname ist bey der arithmetischen Verhältniß die Differenz, bey der geometrischen aber der Quotient der beyden Glieder. Daher bezeichnet man die arithmetische Verhältniß mit dem Subtractionszeichen, die geometrische aber mit dem Divisionszeichen. Hieße demnach das eine Glied der Verhältniß, was es auch für eine Größe wäre, a; der Name der arithmetischen Verhältniß, d, der geometrischen, m: so wäre die allgemeine Form der arithmetischen Verhältniß $a - (a + d)$ wobey d eine positive und negative Größe anzeigen kann; und die allgemeine Form einer geometrischen Verhältniß, die auch schlechtweg Verhältniß heißt, $a : ma$, wobey m eine jede ganze oder gebrochene Zahl, wie auch eine Irrationalzahl anzeigen kann. Ist letztres, so heißt die Verhältniß **irrational**.

§. 65.

Digitized by Google

§. 65.

Die Proportion ist die Gleichheit zweyer Verhältnisse, und wird aus der Gleichheit der Verhältnißnamen erkannt. Sie ist entweder arithmetisch oder geometrisch, je nachdem die Verhältnisse arithmetisch oder geometrisch sind. Die allgemeine Form einer arithmetischen Proportion ist $a - (a + d) = b - (b + d)$; die allgemeine Form einer geometrischen Proportion, die auch schlechtweg Proportion heißt, ist $a : ma = b : mb$.

§. 66.

Die Proportion heißt stetig, proportio continua, wenn die mittlern Glieder einerley sind; abgesondert aber, proportio discreta, wenn die mittlern Glieder verschieden sind. Die allgemeine Form der stetigen Proportion ist arithmetisch $a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$, geometrisch $a : ma = ma : m^2 a$.

II. Natur der arithmetischen Proportion.

§. 67.

Die Summe der äußern Glieder ist, bey einer abgesonderten Proportion, der Summe der mittlern Glieder; bey einer stetigen Proportion aber, dem doppelten mittlern Gliede gleich.

Denn von der abgesonderten Proportion $a - (a + d) = b - (b + d)$ ist offenbar $a + b + d = a + d + b$; und von der stetigen Proportion $a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$ ist offenbar $a + a + 2d = (a + d) + (a + d) = 2(a + d)$.

§. 68.

Digitized by Google

§. 68.

Das vierte Glied einer abgesonderten Proportion findet man, wenn man von der Summe der beyden mittlern das erste subtrahirt; das dritte Glied einer stetigen Proportion findet man, wenn man von dem doppelten mittlern Gliede das erste subtrahirt.

Denn wenn man von der Summe der mittlern Glieder $a + d + b$ das erste Glied a subtrahirt, so erhält man offenbar $b + d$ oder das vierte Glied; und wenn man von dem doppelten mittlern Gliede $2a + 2d$ das erste Glied a subtrahirt, so erhält man offenbar $a + 2d$ oder das dritte Glied.

§. 69.

Das mittlere Glied einer stetigen Proportion findet man, wenn man die Summe der äußern Glieder halbirt.

Denn wenn man die Summe der äußern Glieder $2a + 2d$ mit 2 dividirt, so erhält man offenbar $a + d$ oder das mittlere Glied, welches auch das arithmetische Mittel heißt.

§. 70.

Auf eine ähnliche Art, wie man das arithmetische Mittel findet, macht man im gemeinen Leben sowohl als in den Wissenschaften den Durchschnitt oder die Mittelzahl, wenn man die Summe mehrerer Größen mit ihrer Anzahl dividirt.

So ist z. E. von 3, 5, 7, 9, der Durchschnitt oder die Mittelzahl $\frac{3+5+7+9}{4} = \frac{24}{4} = 6$.

Digitized by Google

III. Natur der geometrischen Proportion.

§. 71.

Das Product der äußern Glieder ist, bey einer abgesonderten Proportion, dem Product der mittlern Glieder; bey einer stetigen Proportion aber, dem Quadrat des mittlern Gliedes gleich.

Denn bey der abgesonderten Proportion $a : ma = b : mb$ ist offenbar $amb = mab$, und bey der stetigen Proportion $a : ma = ma : m^2a$ ist offenbar $m^2a^2 = ma \cdot ma = (ma)^2$.

§. 72.

Zwey gleiche Brüche, wie auch zwey gleiche Producte, geben eine Proportion.

Ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, so ist, wenn $\frac{b}{a} = m$, auch $\frac{d}{c} = m$, folglich $ma = b$ und $mc = d$. Nun ist $a : ma = c : mc$, folglich auch $a : b = c : d$.

Ist $ad = bc$, so ist auch $\frac{ad}{c} = b$, folglich $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$, folglich $a : b = c : d$. Eben so ist auch $\frac{ad}{b} = c$, folglich $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, folglich $b : a = d : c$.

§. 73.

Zwey Verhältnisse, die einer dritten gleich, sind selbst gleich.

Ist $a : b = m : n$, und $c : d = m : n$, so ist $\frac{b}{a} = \frac{n}{m}$ und $\frac{d}{c} = \frac{n}{m}$, folglich $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, folglich $a : b = c : d$.

§. 74.

Digitized by Google

§. 74.

Gleiche Größen A, B, haben zu einer dritten Größe C, und eine Größe C hat zu zwey gleichen Größen A, B, gleiche Verhältniß.

Da $A = B$, so ist $A . C = B . C$, folglich $A : C = B : C$. Eben so ist auch $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$, folglich $C : A = C : B$.

§. 75.

Haben zwey Größen A, B, zu einer dritten Größe C, oder hat eine Größe C zu zwey Größen A, B, gleiche Verhältniß: so sind die beyden Größen A, B, einander gleich.

Denn da $A : C = B : C$, so ist $A . C = B . C$, folglich $A = B$; und da $C : A = C : B$, so ist $C . B = A . C$, folglich $B = A$.

§. 76.

In jeder Proportion ist das zweyte Glied kleiner, oder eben so groß, oder größer als das vierte Glied, je nachdem das erste Glied kleiner, oder eben so groß, oder größer als das dritte ist, und umgekehrt.

Es sey die Proportion $a : ma = b : mb$, worinn m der Verhältnißname. Ist nun $a < b$ so ist auch $ma < mb$; ist $a = b$, so ist auch $ma = mb$; ist $a > b$, so ist auch $ma > mb$. Und umgekehrt, ist $ma < mb$, so ist $a < b$; ist $ma = mb$, so ist $a = b$; ist $ma > mb$, so ist $a > b$.

§. 77.

Das vierte Glied einer abgesonderten Proportion findet man, wenn man das Product der mittlern Glieder mit dem ersten Gliede dividirt; das dritte Glied einer stetigen Proportion findet man, wenn man

Digitized by Google

man das Quadrat des mittlern Gliedes mit dem ersten Gliede dividirt.

Denn wenn man das Product der äußern Glieder amb mit dem ersten Gliede a dividirt, so erhält man offenbar mb, oder das vierte Glied; und wenn man das Quadrat des mittlern Gliedes m^2a^2 mit dem ersten Gliede a dividirt, so erhält man offenbar m^2a oder das dritte Glied.

§. 78.

Das mittlere Glied einer stetigen Proportion findet man, wenn man aus dem Producte der äußern Glieder die Quadratwurzel extrahirt.

Denn wenn man aus dem Producte der äußern Glieder m^2a^2 die Quadratwurzel extrahirt, so findet man offenbar ma oder das mittlere Glied.

§. 79.

Jede geometrische Proportion $a : ma = b : mb$ läßt sich auf mannigfaltige Art abändern, und zwar

1. durch Umkehrung der Glieder:

$ma : a = mb : b$, weil $\frac{a}{ma} = \frac{b}{mb} = \frac{1}{m}$.

2. Durch Versetzung der Glieder:

$a : b = ma : mb$, weil $\frac{b}{a} = \frac{mb}{ma}$.

3. Durch Addition der Glieder:

$a : ma + a = b : mb + b$, weil $\frac{ma + a}{a} = \frac{mb + b}{b} = m + 1$.

$a + ma : ma = b + mb : mb$, weil $\frac{ma}{a + ma} = \frac{mb}{b + mb} = \frac{m}{1 + m}$.

Digitized by Google

4. Durch Subtraction der Glieder:

$a : ma - a = b : mb - b$, weil $\frac{ma - a}{a} = \frac{mb - b}{b} = m - 1$.

$ma - a : ma = mb - b : mb$, weil $\frac{ma}{ma - a} = \frac{mb}{mb - b} = \frac{m}{m - 1}$.

5. Durch Multiplication der Glieder:

$ac : mac = bd : mbd$, weil $\frac{mac}{ac} = \frac{mbd}{bd} = m$.

6. Durch Division der Glieder:

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$, weil $\frac{ma}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{mb}{d} \cdot \frac{d}{b} = m$.

7. Durch Erhebung aller vier Glieder zu gleich hohen Potenzen:

$a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$, weil $\frac{m^n a^n}{a^n} = \frac{m^n b^n}{b^n} = m^n$.

8. Durch Ausziehung gleichnamiger Wurzeln aus allen vier Gliedern:

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{ma} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{mb}$, weil $\frac{\sqrt[n]{m} \cdot \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{m} \sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{m}$.

IV. Zusammensetzung geometrischer Proportionen.

§. 80.

Sind zwey Proportionen von einerley oder verschiedenen Verhältnißnamen: so geben sie, wenn man die Glieder nach der Ordnung mit einander multi-

Digitized by Google

multiplicirt oder dividirt, eine zusammengesetzte Proportion.

Es sey $a : ma = b : mb$, und
$c : nc = d : nd$, so ist

$ac : mnac = bd : mnbd$, weil $\frac{mnac}{ac} = \frac{mnbd}{bd} = mn$.

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{nd}$, weil $\frac{ma}{nc} \cdot \frac{c}{a} = \frac{mb}{nd} \cdot \frac{d}{b} = \frac{m}{n}$.

§. 81.

Sollen zwey Proportionen durch die Multiplication der Glieder zusammengesetzt werden, und es ist ein Hinterglied der einen einem Vorderglied der andern, oder die beyden Hinterglieder der einen den beyden Vordergliedern der andern, oder die mittlern Glieder der einen den äußern Gliedern der andern gleich: so können die gleichen Glieder bey der Zusammensetzung weggelassen werden.

Ist $a : b = g : h$ und
$c : d = h : q$, so ist
$ac : bd = gh : hq = g : q$.

Ist $a : b = c : d$, und
$b : f = d : h$, so ist
$a : f = c : h$, weil $ab : bf = a : f$, und $cd : dh = c : h$.

Ist $a : b = c : d$, und
$b : f = g : c$, so ist
$a : f = g : d$, weil $ab : bf = a : f$, und $cg : dc = g : d$.

§. 82.

Sind in zwey Proportionen die Hinterglieder der einen den Hintergliedern der andern, oder die mittlern Glieder der einen den mittlern Gliedern der andern gleich: so sind mit Weglassung der gleichen Glieder, im ersten Falle die Vorderglieder den Vorder-

Digitized by Google

gliedern proportionirt, im zweyten Falle aber die Vorderglieder den Hintergliedern umgekehrt proportionirt.

Es sey $a : b = c : d$, und
$f : b = h : d$, so ist
$a : f = c : h$, wie erhellet, wenn man die zweyte Proportion umkehrt.

Es sey $a : b = c : d$, und
$f : b = c : g$, so ist
$a : f = g : d$, wie gleichfalls aus Umkehrung der zweyten Proportion erhellet.

§. 83.

Werden bey zwey oder mehrern Verhältnissen die gleichnamigen Glieder mit einander multiplicirt: so sagt man, daß die Verhältniß solcher Producte aus den einzelnen Verhältnissen der Factoren oder aus andern jenen gleichen Verhältnissen zusammengesetzt sey.

So ist z. E. die Verhältniß $ace : bdf$ aus den Verhältnissen $a : b$, $c : d$, $e : f$, zusammengesetzt.
Oder wäre $a : b = m : n$
$c : d = p : q$
$e : f = r : s$
so wäre die Verhältniß $ace : bdf$ auch aus den Verhältnissen $m : n$, $p : q$, $r : s$ zusammengesetzt.

§. 84.

Wären daher diese oder jene einzelne Verhältnisse so beschaffen, daß immer das Hinterglied einer vorhergehenden das Vorderglied der nächst folgenden wäre: so wäre die Verhältniß des Vorderg liedes der ersten zum Hintergliede der letzten aus den einzelnen Verhältnissen selbst, oder aus solchen, die ihnen gleich sind, zusammengesetzt.

Es

Digitized by Google

Es sey $a : b = m : n$
$c : d = n : p$
$e : f = p : q$, so ist
$ace : bdf = m : q$, das ist, die Verhältniß $m : q$ ist aus den Verhältnissen $m : n$, $n : p$, $p : q$, oder aus den Verhältnissen $a : b$, $c : d$, $e : f$, zusammengesetzt, oder ist der zusammengesetzten Verhältniß $ace : dbf$ gleich.

§. 85.

Wären im vorhergehenden Falle die einzelnen Verhältnisse, so viel ihrer sind, alle einander gleich, so nennte man die zusammengesetzte Verhältniß eine um so viel höhere Verhältniß als die Anzahl der einzelnen Verhältnisse beträgt.

Nach der Voraussetzung wäre also
$m : n = a : b$
$n : p = a : b$
$p : q = a : b$, folglich
$m : q = a^3 : b^3 = (a : b)^3 = (m$ [illegible] das heißt m ist zu q in einer dreymal höhern, oder in cubischer Verhältniß der a zu b, oder der m zu n.

§. 86.

Sind zwey Proportionen von einerley Verhältnißnamen: so geben sie, wenn man die Glieder nach der Ordnung addirt oder subtrahirt, eine neue Proportion.

Es sey $a : ma = b : mb$, und
$c : mc = d : md$, so ist
$(a \mp c) : (ma \mp mc) = (b \mp d) : (mb \mp md)$, das ist,
$a \mp c : m(a \mp c) = (b \mp d) : m(b \mp d)$.

Digitized by Google

Ist daher $a : b = m : n$
$c : d = m : n$
$e : f = m : n$, so ist
$(a + c + e) : (b + d + f) = 3m : 3n = m : n$.

§. 87.

Sind zwey Proportionen von verschiedenen Verhältnißnamen, und die Vorderglieder den Vordergliedern proportionirt: so geben sie, wenn man die Glieder nach der Ordnung addirt, oder subtrahirt, eine neue Proportion.

Es sey $a : ma = b : mb$,
$c : nc = d : nd$,
und $a : c = b : d$, so ist
$a \mp c : ma \mp nc = b \mp d : mb \mp$ [illegible]

Denn da $a : c = b : d$, so ist [illegible] $= \frac{d}{b} = p$, folglich $c = ap$ und $d = bp$. Demnach ist
$a : ma = b : mb$ [illegible]
$ap : nap = bp$ [illegible] folglich
$(1 + p) a : (m + np) a = (1 + p) b : (m + np) b$, welches offenbar eine richtige Proportion ist.

V. Practische Rechnungsregeln.

§. 88.

Die *regula de tri*, oder de tribus terminis, ist nichts anders als die Aufgabe, zu drey gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das vierte Glied zu finden. §. 77.

Man theilt sie in die gerade und verkehrte ein. Die gerade, oder regula de tri recta, entsteht, wenn eine Größe mit der andern in gleicher Verhältniß wächst oder abnimmt, als Waaren und ihre Preise. Die verkehrte,

oder

Digitized by Google

oder regula de tri inversa, entsteht, wenn eine Größe in der Verhältniß abnimmt, in welcher die andre wächst, und umgekehrt, als die Zahl der Arbeiter und die Zeit der Arbeit.

Auch ist die Regel detri entweder einfach oder zusammengesetzt. Jene besteht aus einer einzelnen Proportion; diese ist eine aus mehrern einzelnen Proportionen zusammengesetzte Proportion, und heißt bey den Rechenmeistern regula quinque, regula septem, je nachdem sie aus zwey oder aus drey einzelnen Proportionen besteht. Ist nämlich $a : b = c : w$

$$d : e = w : y$$

$$f : g = y : x, \text{ so ist}$$

$ad : bc = c : y$, regula quinque, und

$adf : beg = c : x$, regula septem.

Es wäre z. E. die Frage in wie viel Wochen werden 16 Arbeiter einen Damm von 400 Fuß vollenden, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten; da 20 Arbeiter, die täglich 8 Stunden arbeiteten, einen Damm von 300 Fuß in 4 Wochen vollendet haben: so wären

$$16\ \mathfrak{A} : 20\ \mathfrak{A} = 4\ \mathfrak{W} : w\ \mathfrak{W}.$$

$$300\ \mathfrak{F} : 400\ \mathfrak{F} = w\ \mathfrak{W} : y\ \mathfrak{W}.$$

$$12\ \mathfrak{St} : 8\ \mathfrak{St} = y\ \mathfrak{W} : x\ \mathfrak{W}. \text{ Folglich}$$

$(16 \cdot 300 \cdot 12) : (20 \cdot 400 \cdot 8) = 4 : x$. Folglich

$$x = \frac{20 \cdot 400 \cdot 8 \cdot 4}{16 \cdot 300 \cdot 12} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 8}{4 \cdot 3} = \frac{40}{3} = 4\tfrac{4}{3}\ \mathfrak{W}.$$

§. 89.

Die Kettenregel ist eine aus mehrern Verhältnissen zusammengesetzte Verhältniß. §. 83.

Sollte z. E. die Verhältniß eines Ducaten zu einem Groschen angegeben werden, so kann dies entweder durch eine einzige Verhältniß 66 : 1, oder durch mehrere Zwischenverhältnisse, als des Ducaten zum Thaler, des Tha-

Digitized by Google

lers zur Mark, der Mark zum Groschen, geschehen. So wäre

Duc. : Thal. = 11 : 4
Thal. : Mark = 3 : 1 } folglich Duc : Gr. = 66 : 1
Mark : Gr. = 8 : 1

oder kürzer

4 Duc = 11 Rthl.
1 Rthl = 3 Mark
1 Mark = 8 Grosch. Folglich
4 Duc = 264 Groschen, oder 1 Ducaten = 66 Grosch.

Wollte man hiernach wissen, wie viel 1000 Rthl. Preußisches Geld in holländischen Ducaten thäten, und man wüßte, daß der Cours gegen Gold 135 Procent wäre, das ist, daß 135 Rthl. Preuß. Geld 100 Rthl. holl. Courant machten; daß ferner 1 Rthl. holl. Courant $2\frac{1}{2}$ Fl. holl. Cour. oder 2 Rthl. holl. Courant 5 Fl. holl. Courant machte; daß endlich 1 Fl. = 20 Stüver, und 1 Duc = 5 Fl. 4 Stüver = 104 Stüver wäre: so setzte man

x Duc = 1000 Rthl. Pr. Geld
135 Rthl. Pr. G = 100 Rthl. holl. Cour.
2 Rthl. holl = 5 Fl. holl.
1 Fl. holl = 20 Stüver
104 Stüv = 1 Ducaten

Hebt man nun auf beyden Seiten durch gleiche Divisoren auf: so erhält man durch gehörige Multiplication $351 \cdot x = 125000$, folglich $x = \frac{125000}{351} = 356\frac{44}{351}$ Ducaten.

§. 90.

Die Reesische Regel ist eine besondre Methode, die Regel detri, besonders die zusammengesetzte, so anzusetzen, daß alle Factoren des Divisors mit der unbe-

unbekannten Größe auf die eine Seite, und die Factoren des Dividendus auf die andre Seite kommen.

Jedes Proportionsexempel nämlich besteht aus der Angabe und der Frage; beyde bestehen aus Verhältnissen, deren Glieder als Ursach und Wirkung angesehen werden können. Setzt man nun von der Frage die Ursach zur Linken und die Wirkung zur Rechten, so kommt bey der Angabe die Wirkung zur Linken und die Ursach zur Rechten, und so auch umgekehrt.

So ist z. E. in dem letztern Beyspiele §. 88. die Angabe, daß 20 Arbeiter, wenn sie 4 Wochen lang täglich 8 Stunden arbeiten, die Wirkung hervorbringen, daß sie einen Damm von 300 Fuß vollenden; die Frage aber, daß 16 Arbeiter, wenn sie x Wochen täglich 12 Stunden arbeiten, die Wirkung hervorbringen, daß sie einen Damm von 400 Fuß vollenden. Demnach ist der Ansatz des Exempels folgender:

x Wochen	
16 Arbeiter	400 Fuß
12 Stunden	
	20 Arbeiter
300 Fuß	4 Wochen
	8 Stunden.

Sind einige dieser Glieder Brüche, oder gemischte Zahlen, die man auf unächte Brüche reduciren muß; so versetze man die Nenner in die gegenseitige Kolumne. Denn werden die Glieder beyder Kolumnen mit einerley Zahl multiplicirt, so bleibt die Verhältniß ungeändert; dadurch aber wird der Nenner eines jeden Bruchs in die gegenseitige Kolumne versetzt, und man erhält lauter ganze Zahlen.

Wäre z. E. die Frage, wie viel ℔ ein 3 Gr. Brod wiegen müßte, bey einem Getreidepreiß von $32\frac{1}{2}$ Gr. wenn ein 2 Gr. Brod 6 ℔ wiegen muß, bey einem Getrei-

treidepreiſe von $20\frac{3}{4}$ Gr. ſo ſiehet man leicht ein, daß das Gewicht des Brodes und der Getreidepreiß, die Urſach von dem Brodpreiſe iſt. Demnach wäre der Aufſatz dieſer:

$$\begin{array}{r|l} x \text{ ℔} & 3 \text{ Gr.} \\ \frac{65}{4} = 32\frac{1}{2} \text{ Gr.} & \\ 4 \text{ Gr.} & 6 \text{ ℔} \\ & 20\frac{3}{4} \text{ Gr.} = \frac{83}{4} \\ 4 & 4 \end{array}$$

Sind die zuſammengehörigen Glieder der Verhältniſſe nicht von einerley Art, ſo reducire man ſie durch die bekannten oder gegebenen Verhältniſſe auf Dinge von einerley Art, indem man mittelſt der Kettenregel dieſe Verhältniſſe ſo anſetzt, daß immer einerley Größen auf verſchiedne Seiten kommen.

Wäre z. E. die Aufgabe: Man braucht jährlich für ein Hausweſen von 10 Perſonen 50 Rthl. Pr. Courant an Brodkorn, wenn der Berliner Scheffel 1 Rthl. gilt; wie viel Rthlr. Caſſengeld wird hiezu für 8 Perſonen nöthig ſeyn, wenn der Himten 18 Gr. koſtet; ſo wird offenbar die jährliche Ausgabe durch die Anzahl der Perſonen und den Getreidepreiß beſtimmt. Folglich iſt der Anſatz:

$$\begin{array}{r|l} x \text{ Rthlr. Caſſengeld} & 8 \text{ Perſonen} \\ & 18 \text{ Gr. der Himten} \\ 10 \text{ Perſonen} & 50 \text{ Rthl. Pr. Courant} \\ 24 \text{ Gr. der Scheffel} & \\ 105 \text{ Rthlr. Pr. Courant} & 100 \text{ Rthl. Gold} \\ 15 \text{ Rthl. Gold} & 14 \text{ Rthl. Caſſengeld} \\ (3 \text{ Scheffel}) & (5 \text{ Himten}) \end{array}$$

Digitized by Google

Anmerkung. Lassen sich die Glieder nicht gegen einander ohne Rest dividiren, so bringe man die Auflösung unter die allgemeine Form $x = a \cdot \frac{b}{m}$. Ist nun $\frac{b}{m}$ ein unächter Bruch, dessen Werth zwischen 1 und 2 liegt, so sey er $= 1 + \frac{n}{m}$. Demnach ist $x = a \cdot \frac{b}{m} = a\left(1 + \frac{n}{m}\right) = a + \frac{an}{m}$, welches oft mit Vortheil angebracht werden kann.

§. 91.

Die Gesellschaftsregel ist die Aufgabe, ein Ganzes in eine gegebene Anzahl von Theilen A, B, C, ꝛc. zu theilen, die sich wie gegebene Zahlen a, b, c, ꝛc. verhalten; da denn die Summe der gegebenen Verhältnißzahlen zu dem einzutheilenden Ganzen, wie jede Verhältnißzahl zu dem ihr zugehörigen Theile, oder $(a + b + c) : (A + B + C) = a : A = b : B = c : C$.

Denn nach der Voraussetzung ist

$a : b = A : B$ und
$b : c = B : C$, folglich verwechselt
$a : A = b : B$ und
$b : B = c : C$, folglich auch
$c : C = a : A$, folglich §. 86.

$(a + b + c) : (A + B + C) = a : A = b : B = c : C$, weil alle diese Verhältnisse einander gleich sind.

Diese

Digitized by Google

Diese Gesellschaftsregel wird verschiedentlich angewendet, und heißt nach Verschiedenheit dieser Anwendung Gewinnstrechnung, Verlust- oder Haverey-rechnung, Repartitionsrechnung, Vermischungsrechnung, u. s. w.

Eine besondere Art der Vermischungsrechnung ist die Alligationsrechnung und die sogenannte *regula coeci*, die aber beyde zur Algebra gehören.

Vier-

Digitized by Google

Viertes Kapitel.

Von den Progreßionen.

I. Natur der arithmetischen Progreßion.

§. 92.

Eine Reihe Größen, worin jede drey unmittelbar auf einander folgende Glieder eine stetige arithmetische Proportion geben, machen eine arithmetische Progreßion oder Reihe, welche, wenn die Glieder wachsen, steigend, wenn sie abnehmen, fallend heißt.

Heißt daher das erste Glied a, und die Differenz d; so ist die allgemeine Form einer arithmetischen Reihe:

$\overset{1}{a}, \overset{2}{a+d}, \overset{3}{a+2d}, \overset{4}{a+3d}, \overset{5}{a+4d}, \overset{6}{a+5d}, \overset{7}{a+6d}$ ....

worinn die Differenz d, für die steigende Reihe positiv, für die fallende negativ ist.

§. 93.

In jedem Gliede einer arithmetischen Reihe ist die Differenz so vielmal zum ersten Gliede addirt, als die Anzahl der Glieder, oder der Zeiger, weniger Eins beträgt.

Hält daher die Reihe n Glieder; so ist das letzte Glied, dessen Zeiger n ist, $a + (n - 1)d$; das vorletzte Glied, dessen Zeiger $n - 1$ ist, $a + (n - 2)d$ u. s. w. Vermehrte man die Reihe noch mit einem Gliede, dessen Zeiger also $n + 1$ ist; so wäre dieses Glied

Digitized by Google

$a + nd$ u. s. w. Hiedurch erhält man die nach allgemeiner Form:

$$\overset{1}{a}, \overset{2}{a+d}, \overset{3}{a+2d} \ldots a + \overset{n-1}{(n-2)d}, \overset{n}{a+(n-1)d}, \overset{n+1}{a+nd} \ldots$$

§. 94.

In jeder arithmetischen Reihe ist die Summe der äußersten Glieder der Summe jeder zwey von den äußersten gleich entfernten Glieder, wie auch, wenn die Anzahl der Glieder ungerade ist, dem mittelsten Gliede doppelt genommen, gleich.

Denn in der vorigen Reihe ist die Summe des ersten und letzten Gliedes $2a + nd$ gleich der Summe des dritten und des $n - 1$ Gliedes $2a + nd$, und so auch bey den übrigen.

Ist die Anzahl der Glieder ungerade, so würde das mittelste Glied von dem ersten so weit als von dem letzten abstehen, folglich doppelt genommen der Summe der äußersten Glieder gleich seyn.

§. 95.

Der Zeiger des letzten Gliedes einer ungeraden Reihe sey $2n + 1$, einer geraden $2n$; so ist das letzte Glied der ersten Reihe $a + 2nd$, der zweyten $a + (2n - 1)d$. Folglich ist die Summe der äußersten Glieder einer ungeraden Reihe $2a + 2nd$, also das mittelste Glied $a + nd$; und die Summe der äußersten Glieder einer geraden Reihe $2a + 2nd - d$, also die beyden mittlern Glieder $a + (n-1)d$ und $a + nd$, folglich ihre Zeiger n und $n + 1$.

II. Summe einer arithmetischen Progreßion.

§. 96.

Die Summe aller Glieder einer arithmetischen Reihe ist dem Producte der halben Anzahl der Glieder

der in die Summe der äußersten Glieder gleich; oder $S = (a + z)\frac{m}{2} = (2a + \overline{m - 1} \cdot d)\frac{m}{2}$.

Ist die Anzahl der Glieder gerade, oder $2n$, so sind halb so viel, also n Paare von Gliedern vorhanden, wovon jedes Paar der Summe der äußersten Glieder gleich ist. Diese Summe also $n$mal genommen, macht die Summe aller Paare, und daher der ganzen Reihe, aus.

Ist die Anzahl der Glieder ungerade, oder $2n + 1$, so sind ebenfalls n Paare nebst dem mittelsten Gliede, welches der halben Summe der äußersten Glieder gleich ist, vorhanden; folglich ist der Factor, statt des vorigen n, hier $n + \frac{1}{2} = \frac{2n + 1}{2}$.

Ist also das erste Glied a, das letzte z, die Zahl der Glieder m, die Summe S; so ist $S = (a + z)\frac{m}{2}$. Da aber $z = a + (m - 1)d$ ist, so ist auch $S = (2a + \overline{m - 1} \cdot d)\frac{m}{2}$.

§. 97.

Polygonal, oder vieleckige, oder auch figurirte Zahlen, entstehen, wenn man die Glieder einer arithmetischen Reihe, welche sich mit der Einheit anfängt, summirt; und heißen, je nachdem die Differenz der Reihe 1, 2, 3 u. s. w. ist, drey, vier, fünfeckige Zahlen, so daß die Differenz der Reihe, woraus die Polygonalzahl entsteht, jedesmal um 2 Einheiten geringer ist, als die Zahl der Ecken, wornach die Polygonalzahl benannt wird. Der Zeiger, oder die Anzahl der Glieder einer solchen Reihe, deren Summe eine Polygonalzahl macht, heißt die Seite dieser Polygonalzahl.

§. 98.

Digitized by Google

§. 98.

Die allgemeine Form einer Polygonalzahl wird durch die allgemeine Form der Summe einer arithmetischen Reihe $(2a + \overline{m-1} \cdot d)\ \frac{m}{2} = ma + \frac{m(m-1)d}{2}$ §. 96. bestimmt.

Denn da für jede Polygonalzahl das erste Glied $a = 1$ und für ein nEck die Differenz $d = n - 2$ §. 97. so erhält man, dies in vorige Form gesetzt, diese Form:

$$m + \frac{m(m-1)(n-2)}{2} = \frac{nm^2 - 2m^2 - nm + 4m}{2}$$

$$= \frac{(n-2)m^2 - (n-4)m}{2}.$$

Dies giebt z. E. für das Fünfeck, wo also $n = 5$, diese specielle Form: $\frac{(5-2)m^2 - (5-4)m}{2} = \frac{3m^2 - m}{2}$.

III. Natur der geometrischen Progreßion.

§. 99.

Eine Reihe Größen, worinn jede drey unmittelbar auf einander folgende Glieder eine stetige geometrische Proportion geben, machen eine geometrische **Progreßion** oder **Reihe**; welche, wenn die Glieder wachsen, **steigend**, wenn sie abnehmen, **fallend** heißt.

Ist daher das erste Glied a, und der Verhältnißname m; so ist die allgemeine Form einer geometrischen Reihe:

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{ma},\ \overset{3}{m^2a},\ \overset{4}{m^3a},\ \overset{5}{m^4a},\ \overset{6}{m^5a},\ \overset{7}{m^6a} \ldots .$$

worinn

Digitized by Google

worinn der Verhältnißname m, für die steigende Reihe eine ganze Zahl oder unächter Bruch, für die fallende aber ein ächter Bruch ist.

§. 100.

In jedem Gliede einer geometrischen Reihe ist das erste Glied mit einer Potenz des Verhältnißnamens multiplicirt, deren Exponent die Anzahl der Glieder, oder der Zeiger, weniger Eins ist.

Hat daher die Reihe n Glieder; so ist das letzte Glied, dessen Zeiger n ist, $a \cdot m^{n-1}$ das vorletzte Glied, dessen Zeiger $n - 1$ ist, $a \cdot m^{n-2}$ u. s. w. Vermehrte man die Reihe noch mit einem Gliede, dessen Zeiger also $n + 1$ ist; so wäre dieses Glied $a \cdot m^n$ u. s. w. Hiedurch erhält man die noch allgemeinere Form:

$$\overset{1}{a}, \overset{2}{a \cdot m}, \overset{3}{a \cdot m^2}, \ldots\ldots \overset{n-1}{a \cdot m^{n-2}}, \overset{n}{a \cdot m^{n-1}}, \overset{n+1}{a \cdot m^n} \ldots.$$

Ist $a = 1$, so entsteht eine Reihe, deren erstes Glied die Einheit ist, und die übrigen Potenzen des Verhältnißnamens sind.

§. 101.

In jeder geometrischen Reihe ist das Product der äußersten Glieder dem Producte jeder zwey von den äußersten gleich entfernten Glieder, wie auch, wenn die Anzahl der Glieder ungerade ist, dem Quadrate des mittelsten Gliedes, gleich.

Denn in der vorigen Reihe ist das Product des ersten und letzten Gliedes $a^2 m^n$ gleich dem Producte des dritten und $n - 1$ Gliedes $a^2 m^n$, und so auch bey den übrigen.

Ist die Anzahl der Glieder ungerade, so würde das mittelste Glied von dem ersten so weit als von dem letzten

Digitized by Google

abstehen, folglich sein Quadrat dem Producte der äußersten Glieder gleich seyn.

§. 102.

Der Zeiger des letzten Gliedes einer ungeraden Reihe sey $2n+1$, einer geraden $2n$; so ist das letzte Glied der ungeraden Reihe $a \cdot m^{2n}$, der geraden $a \cdot m^{2n-1}$. Folglich ist das Product der äußersten Glieder einer ungeraden Reihe $a^2 \cdot m^{2n}$, also das mittelste Glied $a \cdot m^n$; und das Product der äußersten Glieder einer geraden Reihe $a^2 \cdot m^{2n-1}$, also die beyden mittlern Glieder $a \cdot m^{n-1}$ und $a \cdot m^n$.

§. 103.

Eine geometrische Reihe wird interpolirt, wenn man zu jeden zwey unmittelbar auf einander folgenden Gliedern die mittlere Proportionalgröße sucht. §. 78. 14.

So verwandelt sich die Reihe a, ma, m^2a, m^3a durch das Interpoliren in diese:

$$a, \sqrt{(m \cdot a^2)}, ma, \sqrt{(m^3 a^2)}, m^2 a, \sqrt{(m^5 a^2)}, m^3 a$$

oder

$$a, \quad m^{\frac{1}{2}} a, \quad ma, \quad m^{\frac{3}{2}} a, \quad m^2 a, \quad m^{\frac{5}{2}} a, \quad m^3 a$$

worinn $m^{\frac{1}{2}}$ der Verhältnißname ist.

IV. Summe einer geometrischen Progreßion.

§. 104.

Die Form für die Summe aller Glieder einer geometrischen Reihe ist $S = \frac{mx^n a - a}{m-1} = \frac{mx - a}{m-1}$.

Denn

Digitized by Google

Denn es ist offenbar solche Summe

$S = a + ma + m^2a \ldots + m^{n-2}a + m^{n-1}a$, folglich, mit m multiplicirt,

$mS = ma + m^2a + m^3a \ldots + m^{n-1}a + m^na$, folglich, erste Reihe subtrahirt,

$mS - S$ oder $(m-1)S = m^na - a$, folglich, mit $m-1$ dividirt, $S = \frac{m^na - a}{m-1}$.

Heißt das letzte Glied z, so ist $z = m^{n-1}a$ §. 100. folglich $mz = m^na$, und, diesen Werth in vorige Form gesetzt, $S = \frac{mz - a}{m-1}$.

§. 105.

Ist die Reihe unendlich, und der Verhältnißname ein positiver ächter Bruch $\frac{b}{c}$, so ist die Summe aller Glieder $S = \frac{ac}{c-b}$.

Denn es ist offenbar solche Summe

$S = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} \ldots$ infin. folglich, mit $\frac{b}{c}$ multiplicirt,

$\frac{b}{c}S = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \ldots$ infin. folglich, letztre Reihe subtrahirt,

$S - \frac{b}{c}S$ oder $\left(1 - \frac{b}{c}\right)S$ das ist $\frac{c-b}{c} \cdot S = a$, folglich, mit $\frac{c-b}{c}$ dividirt, $S = \frac{ac}{c-b}$.

Digitized by Google

§. 106.

Ist die Reihe unendlich, und der Verhältnißname ein negativer ächter Bruch $-\frac{b}{c}$, so ist die Summe aller Glieder $S = \frac{ac}{c+b}$.

Denn es ist offenbar solche Summe

$S = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} \ldots$ infin.

folglich, mit $-\frac{b}{c}$ multiplicirt,

$-\frac{b}{c} S = -\frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \ldots$ infin.

folglich, letztre Reihe subtrahirt,

$S + \frac{b}{c} S$ oder $\left(1 + \frac{b}{c}\right) S$, das ist, $\frac{c+b}{c} \cdot S = a$

folglich, mit $\frac{c+b}{c}$ dividirt,

$S = \frac{ac}{c+b}$.

§. 107.

Sind die Glieder einer unendlichen Reihe Potenzen des positiven oder negativen Bruchs $\frac{1}{a}$, so ist die Summe aller Glieder $S = \frac{1}{a \mp 1}$.

Denn es ist offenbar solche Summe

$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} \ldots$ infin.

folglich, mit $\frac{1}{a}$ multiplicirt,

$\frac{1}{a} S = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \ldots$ infin.

folg-

Digitized by Google

folglich, letztre Reihe subtrahirt,

$S - \frac{1}{a} S$, oder $\left(1 - \frac{1}{a}\right) S$, das $\frac{a-1}{a} \cdot S = \frac{1}{a}$

folglich, mit $\frac{a-1}{a}$ dividirt,

$S = \frac{1}{a-1}$.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, wenn der Bruch $\frac{1}{a}$ negativ ist, daß alsdenn die Summe der Glieder $S = \frac{1}{a+1}$ sey.

Digitized by Google

Fünftes Kapitel.

Von den Logarithmen.

I. Natur der Logarithmen.

§. 108.

Erhebt man eine Größe a in ihre mannigfaltigen Potenzen, so heißen die Exponenten dieser Potenzen die Logarithmen der jedesmaligen daher entstehenden Zahlen, I. §. 43, und machen bey einem bestimmten Werthe solcher Größe a ein logarithmisches System aus. Der hiebey angenommene Werth gedachter Größe, heißt die Fundamentalgröße, Grundzahl, oder die Basis solches Systems.

Es sey $a^m = y$, und $a^n = z$, so ist m der Logarithmus von y, und n der Logarithmus von z, oder so ist $m = \log. y$ und $n = \log. z$. Jeder neue Werth der Größe a gäbe auch den Zahlen y, z u. s. w. einen neuen Werth, und machte also m, n u. s. w. zu Logarithmen von neuen Zahlen; daher auch ein neues System von Logarithmen entstehen würde. Bey den gemeinen Logarithmen setzt man $a = 10$; daher 10 die Basis des gemeinen Systems ist.

§. 109.

In jedem logarithmischen System findet man den Logarithmus eines Products, wenn man die Logarithmen der Factoren addirt; und den Logarithmus eines Bruchs, wenn man von dem Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahirt.

Es

Es sey $a^m = y$, und $a^n = z$, so ist §. 9. $a^{m+n} = y \cdot z$, folglich $m + n = \log.(y \cdot z)$; und $a^{m-n} = \frac{y}{z}$, folglich $m - n = \log. \frac{y}{z}$: da denn im ersten Falle m, n, die Logarithmen der Factoren sind, im zweyten aber m der Logarithmus des Zählers, n des Nenners ist, §. 108.

§. 110.

In jedem logarithmischen System ist der Logarithmus der Einheit Null; und der Logarithmus eines Bruchs, dessen Zähler die Einheit und der Nenner eine Potenz der Fundamentalgröße ist, der Exponent solcher Potenz negativ genommen.

Da $a^0 = 1$, so ist $\log. 1 = 0$. §. 108. Oder da $1 = \frac{y}{y} = \frac{a^m}{a^m}$, so ist $\log. 1 = \log. \frac{y}{y} = m - m = 0$. §. 109.

Da $\frac{1}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m}$, so ist $-m$ der Logarithmus von $\frac{1}{a^m} = \frac{1}{y}$. §. 108. Oder da $\log. 1 = 0$, und $\log. a^m = m$ so ist $\log. \frac{1}{a^m} = 0 - m = -m$. §. 109.

§. 111.

In jedem logarithmischen System findet man den Logarithmus der Potenz einer Größe, wenn man den Logarithmus der Größe mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt; und den Logarithmus der Wurzel einer Größe, wenn man den Logarithmus der Größe mit dem Exponenten der Wurzel dividirt.

Da $\log. c^2 = \log.(c \cdot c) = \log. c + \log. c = 2. \log. c$, auch $\log. c^3 = \log.(c^2 \cdot c^1) = 2 \log. c + \log. c = 3 \log. c$, u. s. w. so ist allgemein $\log. c^n = n . \log. c$.

Digitized by Google

Da $\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}}$, so ist log. $\sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}$ log. $A = \frac{\log. A}{n}$. Oder es sey $A = c^n$, so ist $\sqrt[n]{A} = c$, und log. $A = n$. log. $c = n$. log. $\sqrt[n]{A}$, folglich $\frac{\log. A}{n} =$ log. $\sqrt[n]{A}$.

§. 112.

In dem gemeinen logarithmischen System enthält der Logarithmus der Einheit einer höhern oder niedrern Ordnung der Decadik so viel, im ersten Falle positive, im zweyten negative, Einheiten, als die Anzahl der jedesmaligen Ordnung beträgt.

Denn da in dem gemeinen System $a = 10$, so ist

log. 10^0 = log. $1 = 0$

log. 10^1 = log. $10 = 1$; log. $\frac{1}{10}$ = log. $0,1 = -1$

log. 10^2 = log. $100 = 2$; log. $\frac{1}{10^2}$ = log. $0,01 = -2$

log. 10^3 = log. $1000 = 3$; log. $\frac{1}{10^3}$ = log. $0,001 = -3$

log. $10^n = n$; log. $\frac{1}{10^n} = -n$.

Zusatz. Hieraus erhellet 1) daß die Decimalbrüche mit den correspondirenden ganzen Decimalzahlen einerley Logarithmen haben, die nur durch das positive und negative unterschieden sind. 2) Daß der jedesmalige Logarithmus so viel Einheiten enthalte, als Nullen der zugehörigen Einheit vor- oder nachgehen; und daß umgekehrt der Einheit so viel Nullen vor- oder nachgehen müssen, als Einheiten der zugehörige Logarithmus enthält; nur daß bey positiven Logarithmen die Nullen der Einheit nachgehen, bey negativen aber vorgehen. So ist z. E. log. $1000000 = 6$, und log. $0,000001 = -6$; umge-

Digitized by Google

umgekehrt aber 6 = log. 1000000, und — 6 = log. 0,000001.

§. 113.

In dem gemeinen logarithmischen System sind die Logarithmen aller Zahlen, welche zwischen die Einheiten zweyer unmittelbar auf einander folgender höherer oder niedrer Ordnungen fallen, Brüche, die sich mit der Zahl anfangen, welche der Logarithmus der Einheit der nächst vorhergehenden Ordnung ist, und die Kennziffer, oder Characteristik der Logarithmen genannt wird.

Da log. 1 = 0, und log. 10 = 1, so muß der Logarithmus jeder Zahl zwischen 1 und 10 größer als 0, und kleiner als 1, folglich ein Bruch von der Form 0,..... seyn, welcher also mit 0 anfängt, daher 0 die Characteristik für alle Zahlen von 1 bis 10 ist. Aus gleichem Grunde ist der Logarithmus jeder Zahl zwischen 10 und 100 größer als 1, und kleiner als 2, folglich ein Bruch von der Form 1,.... welcher also mit 1 anfängt, daher 1 die Characteristik für alle Zahlen von 10 bis 100 ist. Eben so ist 2 die Characteristik für alle Zahlen von 100 bis 1000 u. s. w.

Da log. $\frac{1}{10}$ = — 1, und log. $\frac{1}{100}$ = — 2, so muß der Logarithmus jeder Zahl zwischen $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{100}$ kleiner als — 1, und größer als — 2, folglich ein Bruch von der Form — 1,..... seyn, welcher sich mit — 1 anfängt, daher — 1 die Characteristik für alle Zahlen von $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{100}$ ist, u. s. w. Oder, da die Decimalbrüche mit den ganzen Decimalzahlen einerley Logarithmen, aber negativ, haben, so haben solche Logarithmen auch einerley, aber negative, Kennziffern.

Zusatz. Hieraus erhellet 1) daß die Kennziffer des Logarithmus einer jeden decadischen Zahl sich nach dem

Digitized by Google

Range der höchsten Ziffer in dieser Zahl richte; und umgekehrt der Rang der höchsten Ziffer in einer decadischen Zahl nach der Kennziffer des zugehörigen Logarithmus bestimmt werde. — So ist z. E. weil die höchste Ziffer in der decadischen Zahl 5786,542 zur dritten höhern Ordnung gehört, 3 die Kennziffer des zugehörigen Logarithmus, und, weil die höchste Ziffer in der decadischen Zahl 0,00002647 zur fünften niedrern Ordnung gehört, — 5 die Kennziffer des zugehörigen Logarithmus. Gehörte umgekehrt zu einer decadischen Zahl 5786542 ein Logarithmus mit der Kennziffer + 4 oder — 4, so wäre die Zahl im ersten Falle 57865,42; im zweyten 0,00005786542.

2) Daß ein Logarithmus, der für eine Zahl gehöret, welche mit bestimmten Ziffern bezeichnet ist, auch für unzählig andre Zahlen gehöre, welche mit eben den Ziffern bezeichnet werden; nur daß seine Kennziffer geändert würde, je nachdem die höchste Ziffer in den andern Zahlen einen andern und andern Rang hat. So gehört für die Zahlen 3437; 343,7; 34,37; 3,437; 0,3437; 0,03437 u. s. w. einerley Logarithmus, nur daß seine Kennziffern nach der Ordnung 3, 2, 1, 0, — 1, — 2 u. s. w. sind. Und so auch umgekehrt.

§. 114.

In jedem logarithmischen System, dessen Basis a eine positive ganze Zahl ist, sind Logarithmen negativer Zahlen unmögliche oder eingebildete Größen.

Denn unter diesen Bedingungen ist es unmöglich, irgend einen Logarithmus z zu finden, so daß a^z eine negative Zahl werde; indem a^{+z} positive ganze oder gemischte Zahlen, und a^{-z} positive ächte Brüche, folglich niemals negative Zahlen giebt, in welchem Falle erst z der Logarithmus einer negativen Zahl wäre. §. 108.

Zusatz.

Digitized by Google

Zusatz. Kommen daher in Rechnungen negative Zahlen vor, deren Logarithmen gesodert werden, so sehe man sie so lange als positiv an, und bestimme nachher durch die Umstände der Sache, welches Zeichen die durch die Logarithmen gefundenen Zahlen haben müssen.

II. Die logarithmischen Tafeln.

§. 115.

Die Logarithmen der decadischen Zahlen findet man, wenn man durch das Interpoliren einer geometrischen Progreßion, deren Grundverhältniß 1 : 10 ist, die Logarithmen für die Primzahlen berechnet, und aus diesen die Logarithmen den zusammengesetzten Zahlen bestimmt.

Mittelst des fortgesetzten Interpolirens der Verhältniß 1 : 10. §. 103. findet man endlich zwey Zahlen, d, f mit ihren Logarithmen, woraus sich der Logarithmus der Zahl 5 ergiebt. Denn man findet zuletzt

$d = 5{,}c0000001\,45$; log. $d = 0{,}6989700049$
$f = 4{,}9999999691$; log. $f = 0{,}6989700012$

Da nun $d > 5$, und $f < 5$, die Logarithmen beyder Zahlen aber in den ersten acht Decimalstellen mit einander übereinkommen: so müssen eben diese Ziffern zugleich die ersten 8 Decimalstellen des Logarithmus der Zahl 5 seyn, oder es ist log. $5 = 0{,}69897000\ldots$. In den gemeinen Tafeln begnügt man sich mit den ersten 7 Decimalstellen.

Aus log. 5. findet man log. $2 = \log. \frac{10}{5} = \log. 10 - \log. 5 = 0{,}3010300$; log. $4 = \log. 2^2 = 2. \log. 2 = 0{,}6020600$; log. $8 = \log. 4.2 = \log. 4 + \log. 2 = 0{,}903c900$.

Durch

Digitized by Google

Durch das fortgesetzte Interpoliren der Verhältniß 2 : 4 findet man auf gleiche Weise zwey Zahlen, zwischen denen die Zahl 3 ist, deren Logarithmen in so viel Decimalstellen übereinkommen, als man für den Logarithmus der Zahl 3 nöthig hat, und man erhält log. 3 = 0,4771212. Hieraus ergiebt sich zugleich log. 6 = l. 3. 2 = log. 3 + log. 2 = 0, 7781512, und log. 9 = l. 3^2 = 3. log. 3 = 0,9542424.

Auf eben die Art findet man durch das Interpoliren der Verhältniß 6 : 8 den Logarithmus der Zahl 7 = 0,8450980. Zwischen 10 und 20 sind nur für 11, 13, 17, 19, zwischen 20 und 30 nur für 23, 29 die Logarithmen auf solche Art zu suchen, u. s. w.

Nach dieser mühsamen Methode sind wirklich die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100000 von Heinrich Brigg, Professor der Geometrie zu Oxford, und von Adrian Vlacq, einem holländischen Mathematicus in Goude, berechnet worden. Ersterer lieferte in seiner Arithmetica logarithmica 1624 die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000. Letztrer füllte in seiner Arithmetica logarithmica Briggii 1628 die gelassene Lücke mit den Logarithmen der Zahlen von 20000 bis 90000 aus, und gab darauf 1636 zu Goude in Octav die abgekürzten Tafeln heraus, welche nachher oft wieder aufgelegt und in Jedermanns Händen sind. Sie enthalten die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000 mit Weglassung der drey letzten Decimalstellen, wofür, wenn sie über 550 betrugen, die Einheit zur siebenten Decimalstelle addirt ward. Die neuesten und besten Tafeln sind die Scherwinschen, London 1742. welche die Briggischen und Vlacqischen Logarithmen von 1 bis 101000 enthalten, und so bequem eingerichtet sind, daß man bey denselben vieler Rechnungen überhoben ist, welche die kleinern Tafeln oft erfodern.

Man

Digitized by Google

Man hat solche zu Avignon 1774 wieder aufgelegt, und dabey noch verschiedne neue Einrichtungen getroffen. Näher und wohlfeiler hat man solche, nebst vielen andern brauchbaren Tafeln in Joh. Carl Schulze Samlung mathematischer Tafeln, Berlin 1778. 4. und in Georg Vega logarithmische, trigonometrische und andere Tafeln. Wien 1783. 8. Letzter zeigt zugleich sehr deutlich den Gebrauch solcher größern Tafeln; daher hier nur noch für den Gebrauch der kleinern das Nöthige zu lehren ist.

§. 116.

Die Differenzen solcher Zahlen, die über 1000 gehen und um Eins oder noch weniger unterschieden, sind den Differenzen ihrer Logarithmen, wenigstens bis zur siebenten Decimalstelle, ziemlich genau proportionirt; und zwar desto genauer, je weiter die Zahlen über 1000 gehen.

Denn so ist z. E. die Differenz

log. 1050 = 3,0211893		
		0,0004134
— 1051 = 3,0216027		
		0,0004130
— 1052 = 3,0220157		
		0,0004127
— 1053 = 3,0224284		
		0,0004122
— 1054 = 3,0228406		

Noch genauer ist z. E. die Differenz

log. 9995 = 3,9997828		
		0,0000434
— 9996 = 3,9998262		
		0,0000435
— 9997 = 3,9998697		
		0,0000434
— 9998 = 3,9999131		
		0,0000435
— 9999 = 3,9999566		

§. 117.

Der Logarithmus eines ächten Bruchs ist zwar an sich negativ; kann aber durch einen positiven Logarithmus

Digitized by Google

rithmus ausgedruckt werden, wenn man demselben die gehörige negative Kennziffer beyfügt. Ein dergestalt ausgedrückter Logarithmus erhält unzählige Formen, wenn man nach Belieben gleich viele Einheiten der positiven und negativen Kennziffer zusetzt, oder davon wegnimmt.

Es sey ein Decimalbruch 0,3567 gegeben, so ist §. 109. log. $0{,}3567 = \log. \frac{3567}{10000} = \log. 3567 - \log. 10000$. Nun ist

log. 3567 = 3,5523031, davon subtrahirt
log. 10000 = 4,0000000

log. 0,3567 = −0,4476969

Da aber die Tafeln keine negativen Logarithmen enthalten und nicht für Brüche berechnet sind; so pflegt man solche Subtraction nicht wirklich zu verrichten, sondern nur anzuzeigen, um jederzeit einen positiven Logarithmus zu erhalten. Hiernach wäre log. 0,3567 = 3,5523031 — 4 = 0,5523031 — 1 = 4,5523031 — 5 u. s. w. welche Formen alle einerley Resultat geben.

Es sey nunmehr ein gemeiner Bruch $\frac{7}{135}$ gegeben, so ist log. $\frac{7}{135} = \log. 7 - \log. 135$ ebenfalls negativ. Denn

log. 7 = 0,8450980
log. 135 = 2,1303338

log. $\frac{7}{135} = -1{,}2852358$

Nun ist aber auch, nach dem Vorhergehenden

log. 7 = 2,8450980 — 2
log. 135 = 2,1303338

log. $\frac{7}{135} = 0{,}7147642 - 2$

das heißt, log. $\frac{7}{135} = 0{,}7147642 - 2{,}0000000 = -1{,}2852358$, welches mit Obigen einerley Resultat ist.

Der

Digitized by Google

Der hiedurch erhaltene positive Logarithmus mit beygefügter negativer Kennziffer läßt sich gleichfalls ohne Veränderung seines Werths auf mannichfaltige Art ausdrücken. Z. E. log. $\frac{7}{131}$ = 3,7147642 — 5 u. s. w.

§. 118.

Soll zu einer gegebenen Zahl, welche höchstens 4 Ziffern enthält, der Logarithmus gefunden werden: so nehme man den Logarithmus, der in den Tafeln bey solchen Ziffern stehet, und bestimme seine Charakteristik nach dem Range der höchsten Ziffer in der gegebenen Zahl. §. 113.

So ist z. E.

log. 4537 = 3,6567688
log. 4,537 = 0,6567688
log. 0,004537 = 0,6567688 — 3 u. s. w.

§. 119.

Soll zu einer gegebenen Zahl, welche über 4 Ziffern enthält, der Logarithmus gefunden werden: so sehe man die 4 ersten Ziffern als eine ganze Zahl, die übrigen aber als Decimaltheile an; subtrahire den Logarithmus der ganzen Zahl von dem nächstfolgenden Logarithmus; suche zur Einheit, zu den gegebenen Decimaltheilen, und zu der gefundenen Differenz die vierte geometrische Proportionalzahl, wegen §. 116; addire solche zu dem Logarithmus der ganzen Zahl, und bestimme endlich die Characteristik nach dem Range der höchsten Ziffer in der gegebenen Zahl. §. 113.

Es sey z. E. die Zahl 4738425 gegeben: so ist log. 4739 — log. 4738 = *,67[illegible]6867 — *,675595
916. Nun setze man 1 : 0,425 = 916 : x, so ist x = 3
welc[illegible]

Digitized by Google

welches zum log. 4738 addirt giebt *,6756340. Demnach ist

log. 4738425 = 6,6756340
log. 47,38425 = 1,6756340
log. 0,4738425 = 0,6756340 — 1 u. s. w.

§. 120.

Soll zu einer gegebenen Zahl, welche einen angehängten Bruch hat, der Logarithmus gefunden werden: so verwandelt man entweder den angehängten Bruch in einen Decimalbruch, und sucht sodann den zugehörigen Logarithmus nach obigen Regeln; oder man bringt die gegebene gemischte Zahl auf einen unächten Bruch, und subtrahirt alsdann den Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers.

So ist z. E. log. $234\frac{3}{4}$ = log. 234,75 = 2,3706c56; oder log. $234\frac{3}{4}$ = log. $\frac{939}{4}$ = log. 939 — log. 4 u. s. w.

§. 121.

Soll zu einem gegebenen positiven Logarithmus die zugehörige Zahl gefunden werden: so befindet sich solcher entweder genau in den Tafeln unter der Characteristik 3, oder nicht. Ist das erste, so ist die dabey stehende Zahl die gesuchte, wenn man ihrer höchsten Ziffer den Rang giebt, den die Characteristik des gegebnen Logarithmus erfodert. §. 113. Ist hingegen das letzte, so subtrahire man den nächst kleinern Logarithmus von dem gegebnen und von dem nächst grössern; suche zur gefundenen zweyten Differenz, zur Einheit und zur ersten Differenz die vierte geometrische Proportionalzahl; füge solche der dem nächst kleinern Logarithmus zugehörigen Zahl bey: so ist nunmehr diese Zahl die gesuchte, wenn man den Rang

ihrer

Digitized by Google

ihrer höchsten Ziffer nach der Characteristik des gegebnen Logarithmus bestimmt. §. 113.

So ist z. E. 3,8741918 = log. 7485, und 1,8741918 = log. 74,85, und 6,8741918 = log. 7485000 u. s. w. Eben so ist 0,8741918 — 5 = log. 0,00007485 u. s. w.

Wäre der gegebne Logarithmus *, 5639462 nicht genau in den Tafeln unter der Characteristik 3, so giebt der zunächst kleinere Logarithmus der Zahl 3663 von dem gegebnen subtrahirt, ohne auf die Characteristik zu sehen, die erste Differenz 1093, und von dem zunächst größern log. 3664 subtrahirt die zweyte Differenz 1186. Setzt man nun 1186 : 1 = 1093 : x, so ist x = 0,922, welches der Zahl 3663 beygefügt die gesuchte Zahl 3663922 giebt, wenn man den Rang ihrer höchsten Ziffer nach der Characteristik des gegebnen Logarithmus bestimmt. So ist z. E. 4,5639462 = log. 36639,22 und 0,5639462 — 4 = log. 0,0003663922, u. s. w.

§. 122.

Soll zu einem gegebenen negativen Logarithmus die zugehörige Zahl gefunden werden: so ist solche ein Bruch, dessen Zähler die Einheit, der Nenner aber die dem gegebnen Logarithmus, als positiv angesehen, zugehörige Zahl ist. Doch kann man die verlangte Zahl auch in Form eines Decimalbruchs haben, wenn man durch gehörige Veränderung der Characteristik den gegebnen negativen Logarithmus in einen positiven verwandelt §. 117, und die dazu gehörige Zahl nach der vorigen Regel aufsucht.

So ist z. E. — 3,6253124 = log. $\frac{1}{4213}$ und — 4,2533380 = log. $\frac{1}{17132}$ u. s. w.

Digitized by Google

$+4$,

Eben so ist auch $-3,6253124 = -3,6253124 - 4 =$
$(+4,0000000 - 3,6253124) - 4 = 0,3746876 - 4 =$
log. $0,0002369661 = \log. \frac{1}{4220}$. u. s. w.

III. Gebrauch der Logarithmen.

§. 123.

Mittelst der Logarithmen verwandelt sich die Multiplication in eine Addition; die Division in eine Subtraction, das Potenziren in ein Multipliciren; und das Extrahiren in ein Dividiren.

Der Grund des Verfahrens erhellet aus dem Vorhergehenden, und die Art der Operation hat keine Schwierigkeiten. Sollen nemlich zwey Zahlen in einander multiplicirt werden, so addire man die Logarithmen der Zahlen; sollen zwey Zahlen in einander dividirt werden, so subtrahire man den Logarithmus des Divisors vom Logarithmus des Dividendus; soll eine Zahl zu einer Potenz erhoben werden, so multiplicire man den Logarithmus der Zahl mit dem gegebenen Exponenten der Potenz; soll aus einer Zahl eine Wurzel gezogen werden, so dividire man den Logarithmus der Zahl mit dem gegebenen Exponenten der Wurzel. In allen Fällen suche man in den Tafeln zu dem berechneten Logarithmus die ihm zugehörige Zahl auf die vorgeschriebne Art.

Zusatz. Findet es sich, daß beym Extrahiren die Division des Logarithmus mit dem gegebnen Exponenten der Wurzel sich nicht verrichten läßt: so richte man die Kennziffer nach §. 117. dazu gehörig ein. So ist z. E.
log. $\sqrt[3]{\frac{5}{144}} = \log. \sqrt[3]{0,5406075} - 2 = \frac{0,5406075 - 2}{3}$
$= \frac{1,5406075 - 3}{3} = 0,5135358 - 1$. Eben so ist

log.

Digitized by Google

$\log. r_{\frac{1}{144}} = \frac{0,5406075 - 2}{7} = \frac{5,5406075 - 7}{7} =$
$0,7915153 - 1.$

§. 124.

Aufgabe: Die Summe aller Weitzenkörner zu berechnen, welche sich der Erfinder des Schachspiels zur Belohnung ausbath, und womit das Schachbret so belegt werden sollte, daß auf das erste Feld 1 Stück und auf jedes der folgenden jedesmal doppelt so viel, als auf das nächstvorhergehende, gelegt würden.

Man erhält hiedurch eine geometrische Progreßion von 64 Gliedern, deren erstes Glied 1, Verhältnißname 2, letztes Glied also 2^{63} ist, §. 100. Nun ist §. 104. $S = \frac{mx - a}{m - 1} = \frac{2 \cdot 2^{63} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$. Demnach beruhet die Auflösung darauf, daß man den Werth von 2^{64} finde.

Es ist aber §. 13. $(2^2)^2 = 2^4$; $(2^4)^2 = 2^8$; $(2^8)^2 = 2^{16}$; $(2^{16})^2 = 2^{32}$; und $(2^{32})^2 = 2^{64}$. Man berechne daher nach und nach von jeder dieser Größen $2^2, 2^4, 2^8, 2^{16}, 2^{32}$, die Quadratzahl: so erhält man die Summe der Körner $= 2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$.

Mittelst der logarithmischen Rechnung §. 111. ist $\log. 2^{64} = 64. \log. 2 = 19,2659200$, wozu man nach §. 121. die Zahl 18 446 740 000 000 000 000 findet.

Wenn nun nach Wallis 7680 Weitzenkörner auf 1 ℔ gehen, und 80 ℔ einen Berliner Scheffel geben: so setze man §. 90.

Digitized by Google

x Wisp	2^{64} Körner
7680 Körner	1 ℔
80 ℔	1 Scheffel
24 Scheffel	1 Wispel.

Folglich $x = \frac{2^{64}}{14745600}$; daher log. x = 64. log. 2 — log. 14745600.

§. 125.

Aufgabe: Die Größe eines Capitals a nach n Jahren zu finden, wenn die jährigen Zinsen $\frac{q}{r}$ alle Jahr dazu geschlagen werden.

Nach dem ersten Jahre ist das Capital =

$$a + \frac{q}{r}a = \left(1 + \frac{q}{r}\right)a = \left(\frac{r+q}{r}\right)a = A$$

folglich nach dem zweyten Jahre

$$\frac{r+q}{r}A = \frac{r+q}{r} \cdot \frac{r+q}{r}a = \left(\frac{r+q}{r}\right)^2 \cdot a = B$$

folglich nach dem dritten Jahre

$$\frac{r+q}{r}B = \frac{r+q}{r} \cdot \left(\frac{r+q}{r}\right)^2 \cdot a = \left(\frac{r+q}{r}\right)^3 \cdot a = C$$

folglich nach dem vierten Jahre

$$\frac{r+q}{r} \cdot C = \frac{r+q}{r} \cdot \left(\frac{r+q}{r}\right)^3 \cdot a = \left(\frac{r+q}{r}\right)^4 \cdot a$$

also nach dem n. Jahre

$$\frac{r+q}{r} \cdot \left(\frac{r+q}{r}\right)^{n-1} \cdot a = \left(\frac{r+q}{r}\right)^n \cdot a.$$

Es sey z. E. einem Rechnungsbeamten, welcher bey 5 Procent ein Capital von 10000 Rthlr. 20 Jahr lang zu verwalten gehabt, die Rechnung abzunehmen: wie viel wird er an Capital gewähren müssen? Hier ist

Digitized by Google

$a = 10000$, $n = 20$, $\frac{q}{r} = \frac{1}{20}$, folglich $\left(\frac{r+q}{r}\right)^n \cdot a = \left(\frac{21}{20}\right)^{20} \cdot 10000 = C$. Demnach ist

$$\begin{array}{rl} \log. 21 = & 1,3222193 \\ -\log. 20 = & 1,3010300 \\ \hline & 0,0211893 \\ & 20 \\ \hline & 0,4237860 \\ +\log. 10000 = & 4,0000000 \\ \hline & 4,4237860 = \log. C \end{array}$$

§. 126.

Aufgabe: Den gegenwärtigen Werth x eines Capitals a zu finden, wenn solches erst nach n Jahren zahlbar wäre.

Hier muß nothwendig x so groß seyn, daß, wenn man es wie in der vorigen Aufgabe anlegt, es nach n Jahren dem Capital a gleich wird. Demnach ist §. 125. $\left(\frac{r+q}{r}\right)^n \cdot x = a$, folglich $x = a \cdot \left(\frac{r}{r+q}\right)^n$.

Waren z. E. 10000 Rthlr. nach 20 Jahren auszuzahlen, und man wollte sie schon in der Hälfte der Zeit haben: so wäre $x = \left(\frac{20}{21}\right)^{10} \cdot 10000$, folglich $\log. x = 10. \log. \frac{20}{21} + \log. 10000$.

§. 127.

Aufgabe: Den Zustand eines Vermögens a nach n Jahren zu finden, wenn die jährigen Zinsen $\frac{q}{r}$ dazu geschlagen, aber zugleich eine bestimmte Summe b jährlich davon genommen wird.

Digitized by Google

Nach dem ersten Jahre ist das Capital

$$\frac{q+r}{r} \cdot a - b = A$$

nach dem zweyten Jahre

$$\frac{q+r}{r} \cdot A - b = \left(\frac{q+r}{r}\right)^2 a - \frac{q+r}{r} \cdot b - b = B$$

nach dem dritten Jahre

$$\frac{q+r}{r} \cdot B - b = \left(\frac{q+r}{r}\right)^3 a - \left(\frac{q+r}{r}\right)^2 b - \frac{q+r}{r} \cdot b - b = C$$

nach dem vierten Jahre

$$\frac{q+r}{r} \cdot C - b = \left(\frac{q+r}{r}\right)^4 a - \left(\frac{q+r}{r}\right)^3 b - \left(\frac{q+r}{r}\right)^2 \cdot b - \frac{q+r}{r} \cdot b - b$$

nach dem n. Jahre also

$$\left(\frac{q+r}{r}\right)^n a - \left(\frac{q+r}{r}\right)^{n-1} b - \left(\frac{q+r}{r}\right)^{n-2} b \ldots\ldots - \frac{q+r}{r} \cdot b - b.$$

Demnach findet man das Vermögen nach n Jahren, wenn man von $\left(\frac{q+r}{r}\right)^n a$, die Summe S einer geometrischen Reihe subtrahirt, deren erstes Glied b, Verhältnißname $\frac{q+r}{r}$, und Anzahl der Glieder n ist. Nun ist

§. 104. $S = \frac{m^n a - a}{m - 1} = \frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - b}{\frac{q+r}{r} - 1} = \frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - b}{\frac{q+r-r}{r}} =$

$\frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n \cdot rb - rb}{q}$. Folglich ist, wenn $\frac{q}{r} = \frac{1}{20}$, das

Vermögen nach n Jahren $= \left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a - \left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot 20b + 20b =$
$\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot \overline{a - 20b} + 20b$. Ist nun $b > \frac{1}{20} a$, folglich $20b > a$, so ist $a - 20b = -(20b - a)$ folglich das

Digitized by Google

das Vermögen $= 20b - (\frac{21}{20})^n \cdot \overline{20b - a}$. Sollte das Vermögen alsdenn ganz verzehrt, das ist, $= 0$ seyn: so ist $20b - (\frac{21}{20})^n \cdot \overline{20b - a} = 0$, das ist $20b = (\frac{21}{20})^n \cdot \overline{20b - a}$.

§. 128.

Aufgabe: Da eine Zeitrente eine bestimmte Summe ist, welche, da sie die jährlichen Zinsen eines Capitals übersteigt, man jährlich so lange ziehet, bis Capital und Zinsen gänzlich verzehret sind; so entsteht die Frage:

1) Auf wie viel Jahre n kann man die Rente b von dem Capital a ziehen?

Die letzte Formel §. 127. giebt $\frac{20b}{20b - a} = (\frac{21}{20})^n$ folglich $\log. \frac{20b}{20b - a} = n \cdot \log. \frac{21}{20}$, folglich $\log. \frac{20b}{20b - a} : \log. \frac{21}{20} = n$.

2) Wie groß muß das Capital a seyn, um die Rente b auf n Jahre zu ziehen?

Die letzte Formel §. 127. giebt $(\frac{21}{20})^n \cdot a = (\frac{21}{20})^n \cdot 20 \cdot b - 20 \cdot b$, folglich, wenn man beyderseits mit $(\frac{21}{20})^n$ dividirt, $a = 20b - \frac{20^n \cdot 20b}{21^n}$. Sucht man daher von der letzten Größe den Logarithmus und die hiezu gehörige Zahl, und subtrahirt dieselbe von $20b$, so findet man a.

Digitized by Google

3) Wie groß ist die Rente b auf n Jahr von einem Capital a?

Die eben gefundene Formel $a = \left(20 - \frac{20^n - 20}{21^n}\right) b$, giebt $a : \left(20 - \frac{20^n \cdot 20}{21^n}\right) = b$. Sucht man daher von $\frac{20^n \cdot 20}{21^n}$ den Logarithmus und die hiezu gehörige Zahl, subtrahirt dieselbe von 20, und dividirt die Differenz in a, so findet man b.

Anmerkung. Immerwährende Renten sind die Zinsen, die man jährlich vom Capitale zieht. Eine Zeitrente ist eine bestimmte jährliche Summe, welche die jährigen Zinsen übersteigt, und so lange dauert, bis das Capital verzehrt ist. Eine Leibrente hört mit dem Tode des Käufers auf, und wird nach der Formel für die Zeitrente berechnet, wenn man darinn n nach der Wahrscheinlichkeit des Lebens ansetzt. Eine Tontine ist eine Art von Leibrente, nur daß die Theilnehmer von einander erben, und die Portion des Verstorbnen unter die Lebenden vertheilt wird, bis die Societät ausgestorben ist. Sie hat ihren Namen von einem Neapolitaner Lorenz Tontin, der sie in Frankreich angegeben hat. Die erste fieng sich 1689 an, und jede Actie kostete 300 Livres. Für diese erhielt eine Barbierwittwe, die 96 Jahr alt ward, zuletzt eine Rente von 73500 Livres.

§. 129.

Aufgabe: Den Zustand einer anfänglichen Größe C nach n Jahren zu finden, wenn sich solche jährlich nach der bestimmten Verhältniß $m : r$ vermehrt, und zugleich nach der bestimmten Verhältniß $m : s$ vermindert.

Im

Digitized by Google

Im ersten Jahre ist die Vermehrung $m : r = C : \frac{r}{m} \cdot C$, und die Verminderung $m : s = C : \frac{s}{m} \cdot C$; folglich die gänzliche Aenderung $\frac{r}{m} C - \frac{s}{m} \cdot C = \frac{r-s}{m} \cdot C$. Wird diese Aenderung nun zu der Größe C geschlagen: so ist ihr Zustand am Ende des ersten Jahres $C + \frac{r-s}{m} \cdot C = \left(1 + \frac{r-s}{m}\right) C = \frac{m+r-s}{m} \cdot C = P$.

Am Ende des zweyten Jahres ist aus eben dem Grunde aus P geworden $\frac{m+r-s}{m} \cdot P$, oder statt P das vorige gesetzt $\frac{m+r-s}{m} \cdot \frac{m+r-s}{m} \cdot C = \left(\frac{m+r-s}{m}\right)^2 \cdot C = Q$.

Am Ende des dritten Jahres ist aus Q geworden $\frac{m+r-s}{m} \cdot Q$, und statt Q das vorige gesetzt $\left(\frac{m+r-s}{m}\right)^3 \cdot C$.

Am Ende des $n$ten Jahres ist demnach ihr Zustand $\left(\frac{m+r-s}{m}\right)^n \cdot C = x$.

Sollte kein Abnehmen statt finden, so wäre $s = 0$, und die Formel $x = \left(\frac{m+r}{m}\right)^n \cdot C$.

Digitized by Google

Wäre z. E. die anfängliche Volksmenge an einem Orte, $C = 10000$; die Verhältniß der jetzt Lebenden zu den jährlich Gebohrnen $m : r = 250 : 10$; die Verhältniß der jetzt Lebenden zu den jährlich Gestorbenen $m : s = 250 : 7$; und $n = 50$ Jahr: so ist nach 50 Jahren die Volksmenge $x = \left(\frac{250 + 10 - 7}{250}\right)^{50} \cdot 10000 = \left(\frac{253}{250}\right)^{50} \cdot 10000$.

Nun ist

$$50 \log. \tfrac{253}{250} = 0{,}2590250$$
$$+ \log. 10000 = 4{,}0000000$$

folglich $x = 18151$.

Zwey-

Zweytes Buch.

Elemente der Geometrie.

Digitized by Google

1. Die reine Geometrie.

2. Die gemischte Geometrie.

Digitized by Google

Erſter Abſchnitt.

Die reine Geometrie.

1. Von den ebenen Figuren; oder die Planimetrie.
2. Von den körperlichen Figuren; oder die Stereometrie.

Erſtes Kapitel.

Von den ebenen Figuren, oder die Planimetrie.

I. Erſte Begriffe von Figuren.

§. 1.

Ein Punkt heißt, was keine Theile hat. Eine Linie heißt eine Länge ohne Breite, und ihre Grenzen ſind Punkte. Eine Fläche heißt, was nur lang und breit iſt, und ihre Grenzen ſind Linien. Ein Körper heißt, was lang und breit und tief iſt, und ſeine Grenzen ſind Flächen.

§. 2.

Eine gerade Linie iſt, deren Punkte in einer und derſelben Richtung liegen.

Zuſatz. 1. Jede gerade Linie läßt ſich an beyden Seiten in derſelben Richtung beliebig verlängern.

Digitized by Google

2. Von jedem Punkte läßt sich zu jedem andern eine Linie ziehen, welche beyde Punkte verbindet.

3. Eine Linie schneidet die andre, wenn sie zwey Punkte, welche an verschiednen Seiten der andern und außerhalb derselben liegen, verbindet.

4. Zwey gerade Linien können einander nur in einem Punkte schneiden.

§. 3.

Eine ebene Fläche, oder eine Ebene, ist, in welcher jegliche zwey Punkte durch eine gerade Linie so verbunden werden können, daß solche Linie in der Fläche liegt.

§. 4.

Ein ebener geradlinichter Winkel ist die Neigung zweyer geraden Linien gegen einander, wenn solche in einer Ebene aus einem Punkte ausgehen und nicht in einer geraden Linie liegen. Dieser Punkt heißt die Spitze oder der Scheitel; die Linien aber die Seiten oder Schenkel des Winkels, welchen sie einschließen.

Zusatz. Jede gerade Linie, welche durch einen innerhalb der Oeffnung des Winkels befindlichen Punkt gehet, schneidet genugsam verlängert wenigstens einen seiner Schenkel.

Anmerkung. Durch das Wort Winkel wird jederzeit ein ebener geradlinichter Winkel angezeigt, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird.

§. 5.

Zwey Winkel, welche einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt und Schenkel haben, indeß daß die beyden einander entgegengesetzten Schenkel in einer gera-

Digitized by Google

geraden Linie liegen, heißen Nebenwinkel. Zwey Winkel, welche einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt haben, indeß daß jede zwey einander entgegengesetzte Schenkel in einer geraden Linie liegen, heißen Scheitelwinkel.

Zusatz. Zwey gerade Linien, deren eine von einem Punkte der andern, welcher nicht der Endpunkt ist, ausgehet, machen Nebenwinkel. Zwey gerade Linien, welche einander schneiden, machen Scheitelwinkel.

§. 6.

Eine ebene Figur ist eine ebene Fläche, welche von allen Seiten begrenzt ist. Die Grenzen machen zusammen den Umfang oder den Perimeter der Figur aus. Sind solche Grenzen gerade Linien; so nennt man die Figur geradlinicht, und die geraden Linien ihre Seiten.

Anmerkung. Ist von Figuren und Linien die Rede; so denke man sie sich allemal in einer Ebene, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird.

Zusatz. 1. Jede durch einen Punkt innerhalb der Figur gelegte gerade Linie schneidet genugsam verlängert den Umfang wenigstens in zwey Punkten.

2. Zwey Figuren schneiden einander, wenn der Umfang der einen zum Theil innerhalb, zum Theil außerhalb der andern liegt; auch schneiden sie alsdenn einander wenigstens in zwey Punkten.

3. Eine geradlinichte Figur hat wenigstens drey Seiten, weil zwey gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden.

4. So viel Seiten eine geradlinichte Figur hat, so viel Winkel hat sie auch.

§. 7.

Digitized by Google

§. 7.

Größen decken einander, wenn man sie dergestalt auf einander legen kann, daß ihre Grenzen zusammen fallen.

Zusatz. 1. Gerade Linien, wie auch Winkel, sind einander gleich, wenn sie sich decken; und decken sich, wenn sie einander gleich sind. Sind sie ungleich: so fällt die Grenze des Größern außerhalb der Grenze des Kleinern.

2. Figuren, die sich decken, sind einander gleich; doch können sie auch einander gleich seyn, ohne sich zu decken, indem ein Stück, welches an der einen Seite fehlt, an der andern hervorragen kann.

§. 8.

Eine gerade Linie ist senkrecht oder perpendikular auf einer andern, wenn sie mit der andern gleiche Nebenwinkel macht. Die gleichen Nebenwinkel heißen rechte Winkel. Ein stumpfer Winkel heißt, der größer; ein spitzer, der kleiner als ein rechter Winkel ist.

§. 9.

Geradlinichte Figuren heißen, nach der Zahl der Seiten oder der Winkel, dreyseitige, vierseitige, vielseitige Figuren; oder Triangel, Quadrangel, Polygone. Auch heißen sie regulär oder irregulär, je nachdem die Seiten, wie auch die Winkel, alle einander gleich sind oder nicht. Eine gerade Linie von einem Winkel der Figur bis zu einem entgegengesetzten heißt eine Diagonale.

§. 10.

Von den Triangeln heißt derjenige gleichseitig, der drey gleiche Seiten hat; gleichschenklicht, der zwey

zwey gleiche Seiten hat; ungleichseitig, der drey ungleiche Seiten hat.

Ferner heißt von den Triangeln derjenige rechtwinklicht, der einen rechten Winkel hat, stumpfwinklicht, der einen stumpfen Winkel hat; spitzwinklicht, der drey spitze Winkel hat.

Beym rechtwinklichten Triangel nennt man die Seite, welche dem rechten Winkel entgegen gesetzt ist, die Hypothenuse; und die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, die Katheten, oder Perpendikel.

§. 11.

Ein Cirkel ist eine ebene Figur, welche von einer Linie, die von einem gewissen Punkte innerhalb der Figur allenthalben gleichweit abstehet, begrenzt wird. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt, oder das Centrum; die Begrenzungslinie der Umkreis, oder die Peripherie; jede gerade Linie vom Mittelpunkte bis zum Umkreise der Halbmesser, oder der Radius; jede gerade Linie von einem Punkte des Umkreises bis zu einem andern, wenn sie durch den Mittelpunkt gehet, der Durchmesser, oder Diameter; wenn sie nicht durch den Mittelpunkt gehet, eine Sehne, oder Chorde; jedes Stück des Umkreises ein Bogen.

Zusatz. 1. Alle Halbmesser in einem Cirkel sind einander gleich.

2. Jeder Punkt, dessen Abstand vom Centro entweder größer, oder kleiner, als der Halbmesser ist, liegt im ersten Falle außerhalb, im zweyten innerhalb der Cirkelfläche.

3. Der Durchmesser ist der doppelte Halbmesser; daher sind auch alle Durchmesser in einem Cirkel einander gleich.

4. Der Durchmesser halbirt die Fläche sowohl, als den Umkreis des Cirkels.

5. Aus jedem Punkte läßt sich mit jedem Halbmesser ein Cirkel beschreiben.

6. Haben zwey Cirkel gleiche Halbmesser, oder Durchmesser: so sind ihre Flächen sowohl als ihre Umkreise einander gleich.

§. 12.

Aufgabe: Auf jeder geraden Linie, AB, einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben. Fig. 1.

Aus dem Endpunkte A beschreibe man mit dem Halbmesser AB einen Cirkel, desgleichen auch aus B mit BA. Vom Durchschnitte C ziehe man CA, CB: so ist △CAB gleichseitig.

Denn es ist §. 11. Zus. 1. CA = AB, und AB = BC, folglich I. §. 45. auch CA = BC.

§. 13.

Aufgabe: Jede gerade Linie AB an irgend einen Punkt C zu legen; auch zu irgend einer geraden Linie CD hinzuzusetzen, oder von irgend einer größern CD abzuschneiden. Fig. 2.

Aus C beschreibe man mit einem der AB gleichen Halbmesser einen Cirkel: so lehrt der Augenschein, wie man die Linie als CE = AB an C legen könne; auch so, daß sie, als CF = AB zu der andern CD hinzugesetzt, oder, als CG = AB von der größern CD abgeschnitten werde.

II. Lehre von den Triangeln.

§. 14.

Sind in zwey Triangeln ABC, DEF, zwey Seiten AC, CB, und der davon eingeschlossene Win-

Digitized by Google

kel ACB des einen Triangels, zweyen Seiten DF, FE, und dem davon eingeschlossenen Winkel DFE des andern Triangels, in der Ordnung, wie sie hier genannt worden, gleich: so sind die Triangel selbst und ihre gleichen Seiten oder Winkeln entgegengesetzte Winkel oder Seiten einander gleich. Fig. 3.

Man lege den einen △ABC auf den andern, daß C auf F liegt: so decken sich §. 7. die gleichen Winkel ACB, DFE; die gleichen Seiten CA, FD, und CB, FE; folglich auch AB, DE; folglich die ganzen Triangel, und es ist △ABC = △DEF; AB = DE; BAC = EDF; ABC = DEF.

§. 15.

Sind in einem Triangel ABC zwey Seiten BA, AC einander gleich: so sind die solchen Seiten entgegengesetzten Winkel ACB, ABC, auch einander gleich. Fig. 4.

Man verlängere AB, AC, mache §. 13. BD = CE, und ziehe BE, CD: so ist I. §. 46. AD = AE.

Da AB = AC; AE = AD; A = A: so ist §. 14. △ABE = △ACD; BE = CD; ABE = ACD; AEB = ADC.

Da CE = BD; BE = CD; AEB = ADC: so ist §. 14 △EBC = △DBC und CBE = BCD. Nun war ABE = ACD. Folglich ist I. §. 46. ABC = ACB.

§. 16.

Sind in einem Triangel ABC, zwey Winkel ACB, ABC, einander gleich: so sind die solchen Winkeln entgegengesetzten Seiten AB, AC, auch einander gleich. Fig. 5.

Digitized by Google

Denn wären AB, AC, ungleich und etwa AB größer: so sey §. 13. BD = AC. Nun ist BC = BC, und ABC = ACB. Folglich wäre §. 14. △DBC = △ACB, welches I. §. 44. unmöglich.

§. 17.

Sind in zwey Triangeln ABC, DEF, die drey Seiten AB, BC, CA, des einen, den drey Seiten DE, EF, FD, des andern, in der Ordnung wie sie hier genannt worden, gleich: so sind die Triangel selbst, und die gleichen Seiten entgegengesetzten Winkel, einander gleich. Fig. 3. 6.

Man lege Fig. 3. den einen △ABC auf den andern, daß, weil BC = EF, §. 7. C auf F, und B auf E liegt: so muß A auf D fallen, folglich §. 7. BA die ED, und CA die FD, und daher △ABC den △DEF, folglich die gleichen Seiten entgegengesetzten Winkel einander, decken.

Denn fiel A nicht auf D, sondern irgendwo außer D, wie Fig. 6: so ziehe man AD. Nun ist angenommen BA = ED, folglich §. 15. BAD = BDA, folglich CAD < BDA, und noch vielmehr CAD < CDA. Nun ist auch angenommen CA = FD, folglich §. 15. CAD = CDA, welches dem Vorigen offenbar widerspricht.

§. 18.

Aufgabe: Jeden geradlinichten Winkel BAC zu halbiren. Fig. 7.

Man mache §. 13. AD = AE, ziehe DE, beschreibe §. 12. den gleichseitigen △DEF, und ziehe AF: so halbirt solche den Winkel BAC.

Denn

Denn da DA = AE, DF = FE, FA = FA: so ist §. 17. △ADF = △AEF, und DAF = FAE.

§. 19.

Aufgabe: Jede gerade Linie AB zu halbiren. Fig. 8.

Man beschreibe §. 12. den gleichseitigen △ABC, halbire §. 18. den Winkel ACB mittelst CD: so halbirt solche die gerade Linie AB.

Denn da AC = CB, CD = CD, ACD = DCB: so ist §. 14. △CAD = △CBD, und AD = DB.

§. 20.

Aufgabe: Auf einer geraden Linie AB, in einem Punkte C, einen Perpendikel zu errichten. Fig. 9.

Man mache §. 13. CD = CE, beschreibe §. 12. den gleichseitigen △DEF, und ziehe FC: so ist diese auf AB in C senkrecht.

Denn da CD = CE, DF = FE, FC = FC: so ist §. 17. △FDC = △FEC, und FCD = FCE.

§. 21.

Aufgabe: Auf eine gerade Linie AB, von einem Punkte C, einen Perpendikel zu fällen. Fig. 10.

An der andern Seite der Linie AB nehme man willkührlich einen Punkt D, und beschreibe aus C mit CD einen Cirkel, welcher die AB in E und F schneidet. Man halbire §. 19. EF in G, und ziehe CG: so ist solche auf AB senkrecht.

Denn da EG = GF, EC = CF, CG = CG: so ist §. 17. △CEG = △CFG, und CGE = CGF.

Digitized by Google

§. 22.

Jede Nebenwinkel ACD, DCB, sind zusammen zwey rechten Winkeln gleich. Fig. 11.

Sind ACD, DCB, einander gleich: so sind sie selbst §. 8. zwey rechte Winkel. Sind sie ungleich: so errichte man §. 20. den Perpendikel CE, daß also ACE + ECB = 2 R.

Nun ist ECB = ECD + DCB, folglich I. §. 46. ECB + ACE = ECD + DCB + ACE. Eben so ist ACD = ACE + ECD, folglich I. §. 46. ACD + DCB = ACE + ECD + DCB. Demnach ist I. §. 45. ACD + DCB = ECB + ACE = 2 R.

Zusatz. 1. Ist ein Winkel BCD gegeben, und man verlängert einen seiner Schenkel BC: so erhält man §. 5. seinen Nebenwinkel DCA, welcher seine Ergänzung, oder sein Complement zu zwey rechten Winkeln genannt wird.

2. Sind zwey Winkel einander gleich: so sind auch ihre Complemente einander gleich; und umgekehrt.

§. 23.

Zwey Winkel BCD, DCA, welche zusammen zwey rechten Winkeln gleich sind, und einen gemeinschaftlichen Scheitel C und Schenkel CD haben, sind Nebenwinkel. Fig. 11.

Gesetzt ACB wäre keine gerade Linie (§. 5.), so sey es irgend eine andre, etwa ACF, so daß also §. 22. DCA + DCF = 2 R. Nun ist angenommen BCD + DCA = 2 R. Folglich wäre I. §. 45. DCA + DCF = BCD + DCA, folglich I. §. 46. DCF = BCD, welches I. §. 44. unmöglich ist.

§. 24.

Digitized by Google

§. 24.

Alle rechte Winkel sind einander gleich. Fig. 11.

Gesetzt zwey rechte Winkel wären ungleich, wie ECB, ECF: so verlängere man BC nach A. Nun ist angenommen, daß ECB ein rechter Winkel. Folglich ist §. 22. auch ACE ein rechter Winkel. Nun ist auch angenommen, daß ECF ein rechter Winkel. Folglich wären §. 23. ACE, ECF, Nebenwinkel, das ist, §. 5. ACF eine gerade Linie. Nun ist auch ACB eine gerade Linie, und beyde schnitten einander in AC, welches §. 2. Zus. 4. unmöglich ist.

§. 25.

Jede Scheitelwinkel AEC, DEB, sind einander gleich. Fig. 12.

Da §. 22. AEC + AED = 2 R, und AED + DEB = 2 R. so ist I. §. 45. AEC + AED = AED + DEB, folglich I. §. 46. AEC = DEB.

Eben so beweist man auch, daß AED = CEB.

Zusatz. Die Winkel um einen gemeinschaftlichen Punkt E, sind zusammen vier rechten Winkeln gleich.

§. 26.

Zwey Winkel, AEC, DEB, welche einander gleich sind, und einen gemeinschaftlichen Scheitel E haben, indeß daß zwey einander entgegengesetzte, Schenkel, AE, EB, in einer geraden Linie liegen, sind Scheitelwinkel. Fig. 12.

Gesetzt CED wäre keine gerade Linie (§. 5.) so sey es irgend eine andre, etwa CEF, so daß also §. 25. AEC = BEF. Nun ist angenommen AEC = DEB. Folglich wäre I. §. 45. BEF = DEB, welches I. §. 44. unmöglich ist.

Digitized by Google

§. 27.

In jedem Triangel ABC, dessen Seite BC verlängert worden, ist der äußere Winkel ACD größer, als jeder der beyden innern ihm entgegengesetzten, BAC, ABC. Fig. 13.

Man halbire §. 19. AC in E, ziehe BE, verlängere sie, mache §. 13. EF = BE, und ziehe FC.

Da AE = EC, BE = EF, und §. 25. AEB = FEC: so ist §. 14. BAE = ECF, folglich I. §. 44. ACD > BAE.

Auf eben die Art, wenn man BC halbirt, beweist man auch, daß ACD > ABC.

§. 28.

In jedem Triangel ABC sind jede zwey Winkel ABC, ACB, zusammen kleiner als zwey rechte Winkel. Fig. 13.

Verlängert man BC, so ist §. 27. ABC < ACD, und §. 22. ACB + ACD = 2 R. Folglich ist I. §. 48. ABC + ACB + ACD < ACD + 2 R. folglich ist I. §. 48. ABC + ACB < 2 R.

Zusatz. Auf eine gerade Linie AB, fällt von einem Punkte C nur ein Perpendikel CG. Fig. 10.

Denn fiel noch ein anderer Perpendikel CF: so wäre CGF + CFG = 2 R. gegen das eben bewiesene.

§. 29.

In jedem Triangel ABC, ist einer größern Seite AC, auch ein größerer Winkel ABC; und einem größern Winkel ABC, auch eine größere Seite AC entgegengesetzt. Fig. 14.

Ist

Ist erstlich AC > CB, so mache man §. 13. AD = AB. Folglich ist §. 15. ABD = ADB, folglich ABC > ADB. Nun ist §. 27. ADB > ACB. Folglich ist noch vielmehr ABC > ACB.

Ist zweytens ABC > ACB, so ist weder AC < AB, weil sonst ABC < ACB seyn müßte; noch AC = AB, weil sonst §. 15. ABC = ACB wäre. Folglich ist nothwendig AC > AB.

§. 30.

Unter allen Linien, die von einem Punkte C nach einer geraden Linie AB gezogen werden, ist der Perpendikel CG die kleinste, und jede dem Perpendikel nähere CF, kleiner als die entferntere CB. Fig. 10.

Da CGF ein rechter Winkel: so ist §. 28. CBG sowohl, als CFG, kleiner als ein rechter Winkel; folglich §. 22. CFB ein stumpfer Winkel. Demnach ist §. 29. CG < CF, und CF < CB.

Zusatz. Fällt von einem Punkte C auf eine gerade Linie AB ein Perpendikel CG; so heißt solcher die Entfernung, oder der Abstand des Punkts C von solcher Linie AB.

§. 31.

Sind in zwey Triangeln ABC, DEF, zwey Seiten BA, AC, und der der größern Seite BA entgegengesetzte Winkel ACB, des einen Triangels, zweyen Seiten ED, DF, und dem der größern Seite ED entgegengesetzten Winkel DFE des andern Triangels, in der Ordnung, wie sie hier genannt worden, gleich: so sind die Triangel selbst, und ihre gleichen Seiten oder Winkeln entgegengesetzte Winkel oder Seiten einander gleich. Fig. 3.

Digitized by Google

Man lege den einen △ABC auf den andern, daß C auf F liegt: so decken sich §. 7. die gleichen Winkel ACB, DFE, und die gleichen Seiten CA, FD, so daß A auf D und CB auf FE fällt. Nun kann B nicht diesseits E etwa in G fallen, weil sonst §. 7. CB = FG wäre, CA = FD, und BCA = GFD, folglich §. 14. △ABC = △DGF und AB = DG, folglich, weil AB = DE, auch DG = DE, welches §. 30. unmöglich ist. Eben so beweist man, daß B auch nicht jenseits E fallen kann. Folglich muß nothwendig B auf E fallen. Folglich ist §. 7. CB = FE. Nun ist auch CA = FD, BCA = EFD, folglich ist §. 14. △ABC = △DEF, BAC = EDF, ABC = DEF.

§. 32.

In jedem Triangel ABC, sind jede zwey Seiten BA, AC, zusammen größer als die dritte BC. Fig. 15.

Man verlängere BA, mache AD = AC, und ziehe DC: so ist §. 15. ACD = ADC, folglich BCD > ADC, folglich §. 29. BD > BC. Nun ist BD = BA + AD = BA + AC. Folglich ist BA + AC > BC.

Eben so beweist man auch, daß AC + CB > AB, und AB + BC > AC.

§. 33.

Ist auf der Grundlinie BC eines Triangels ABC ein andrer Triangel DBC, dessen Spitze D innerhalb des ersten fällt, beschrieben: so sind die innern Schenkel, BD, DC, zwar zusammen kleiner als die äußern Schenkel BA, AC, schließen aber einen größern Winkel BDC ein. Fig. 16.

Man

Man verlängere BD bis E: so ist §. 32. BA + AE > BE, folglich I. §. 48. BA + AC > BE + EC. Nun ist eben so §. 32. DE + EC > DC, folglich I. §. 48. BE + EC > BD + DC. Folglich ist noch vielmehr BA + AC > BD + DC.

Da §. 27. BDC > BEC, und BEC > BAC: so ist noch vielmehr BDC > BAC.

§. 34.

Aufgabe: Aus drey geraden Linien AC, CD, DE, von denen jede zwey zusammen größer als die dritte sind, einen Triangel zu machen. Fig. 17.

Auf eine gerade Linie AB trage man die gegebenen eine nach der andern auf, und beschreibe einen Cirkel aus C mit CA, und noch einen aus D mit DE. Vom Durchschnittpunkt F ziehe man nach D und C gerade Linien: so ist im △FDC §. 11. Zus. 1. FC = CA, CD = CD, FD = DE.

§. 35.

Aufgabe: An eine gerade Linie AB in einem bestimmten Punkte A einen gegebenen Winkel DCE zu legen. Fig. 18.

In den Schenkeln des gegebenen Winkels nehme man willkürlich die Punkte D, E, ziehe DE, und mache §. 34. aus den drey Linien CE, ED, DC, den Triangel AGF, so daß AG = CE, GF = ED, FE = DC: so ist §. 17. △AGF = △CED, und FAG = DCE.

§. 36.

Sind in zwey Triangeln ABC, DEF, zwey Seiten BA, AC, aber nicht der davon eingeschlossene Winkel BAC des einen Triangels, zweyen Seiten ED, DF, und dem davon eingeschlossenen Winkel EDF

EDF des andern Triangels, in der Ordnung wie sie hier genannt worden, gleich: so ist dem größern Winkel BAC, auch eine größere Seite BC entgegengesetzt. Fig. 19.

Da BAC > EDF, so mache man §. 35. EDH = BAC und §. 13. DH = DF = AC. Ziehe EH und FH.

Da AB = DE, AC = DH, BAC = EDH: so ist §. 14. △ABC = △DEH und BC = EH.

Da DH = DF: so ist §. 15. DFH = DHF, folglich EFH > DHF und noch vielmehr EFH > EHF. Folglich ist §. 29. EH > EF. Nun ist bewiesen BC = EH. Folglich ist auch BC > EF.

§. 37.

Sind in zwey Triangeln, ABC, DEF, zwey Seiten BA, AC, aber nicht die dritte Seite BC des einen Triangels, zweyen Seiten ED, DG, und der dritten Seite EF des andern Triangels, in der Ordnung, wie sie hier genannt worden, gleich: so ist der größern Seite BC auch ein größerer Winkel BAC entgegengesetzt. Fig. 19.

Da BC > EF, so ist weder BAC < EDF, weil sonst §. 36. BC < EF seyn müßte, noch BAC = EDF, weil sonst §. 14. BC = EF wäre. Folglich ist nothwendig BAC > EDF.

§. 37. *

Sind in drey Triangeln GAF, BAC, EDF, von den Winkeln, welche den Grundlinien GF, BC, EF, entgegengesetzt sind, jede zwey zusammen größer als der dritte, und die Schenkel alle einander gleich: so kann aus den Grundlinien GF, BC, EF, ein Triangel gemacht werden. Fig. 19.

Sind

Digitized by Google

Sind die den Grundlinien entgegengesetzten Winkel einander gleich: so sind §. 14. auch die Grundlinien einander gleich, folglich offenbar jede zwey davon größer als die dritte. Folglich kann §. 34. aus diesen Grundlinien ein Triangel gemacht werden.

Sind gedachte Winkel aber ungleich: so nehme man zwey davon, welche man will, etwa BAC, EDF. Nun sey §. 35. FDH = BAC, und DH = DF = AC. Ziehet man nun HF, HE: so ist §. 14. FH = BC. Nun ist angenommen EDF + BAC > GAF, aber BAC = FDH. Folglich ist EDF + FDH > GAF, das ist, EDH > GAF, folglich §. 36. EH > GF. Nun ist §. 32. EF + FH > EH. Folglich ist noch vielmehr EF + FH > GF. Nun war FH = BC. Folglich ist EF + BC > GF. Da nun eben so erweislich, daß EF + GF > BC, und BC + GF > EF: so sind von diesen Grundlinien GF, BC, EF, jede zwey zusammen größer als die dritte, und kann daher §. 34. ein Triangel aus ihnen gemacht werden.

§. 38.

Sind in zwey Triangeln ABC, DEF, zwey Winkel ABC, ACB, und die anliegende Seite BC, oder eine entgegengesetzte Seite AB, des einen Triangels, zweyen Winkeln DEF, DFE, und der anliegenden Seite EF, oder der dem gleichen Winkel entgegengesetzten Seite DE, des andern Triangels, in der Ordnung wie sie hier genannt worden, gleich: so sind die Triangel selbst und ihre gleichen Winkeln oder Seiten, entgegengesetzte Seiten oder Winkel einander gleich. Fig. 20.

Es sey zuerst BC = EF: so sind nothwendig BA, ED einander gleich, folglich §. 14. △ABC = △DEF.

Denn

Digitized by Google

Denn wären BA, ED, ungleich, also die eine, etwa BA, größer: so sey §. 13. BG = ED. Ziehet man nun GC: so wäre §. 14. GCB = DFE. Nun ist angenommen ACB = DFE. Folglich wäre I. §. 45. ACB = GCB, welches I. §. 44. unmöglich ist.

Es sey zweytens AB = DE: so sind nothwendig BC, EF, einander gleich, folglich §. 14. △ABC = △DEF.

Denn wären BC, EF ungleich, also die eine, etwa BC, größer: so sey §. 13. BH = EF. Ziehet man nun AH: so wäre §. 14. AHB = DFE. Nun ist angenommen ACB = DFE. Folglich wäre I. §. 45. ACB = AHB, welches §. 27. unmöglich ist.

III. Lehre von den Parallellinien.

§. 39.

Zwey gerade Linien, die an der einen oder der andern Seite irgend einmal zusammenlaufen, heißen convergent; die aber an keiner Seite zusammenlaufen, so weit man sie auch verlängern mag, heißen parallel. Werden zwey gerade Linien, sie mögen parallel oder convergent seyn, von einer dritten geschnitten: so liegen von den innern Winkeln, welche diese mit jenen macht, zwey disseits, und zwey jenseits der schneidenden Linie. Von den innern Winkeln nennt man diejenigen Wechselswinkel, wovon ein disseitiger einem jenseitigen entgegengesetzt ist.

§. 40.

Werden zwey gerade Linien BA, AC, welche convergent sind, von einer dritten, FG, geschnitten: so sind die innern Winkel DEA, EDA, an der Seite, wo die beyden Linien zusammenlaufen, zusammen kleiner

Digitized by Google

kleiner als zwey rechte Winkel; die innern jenseitigen CED, BDE, aber zusammen größer als zwey rechte Winkel. Fig. 21.

Da die beyden Linien BA, CA, wenn man sie gehörig verlängert, in irgend einem Punkte A zusammenlaufen: so entsteht ein Triangel ADE. Folglich ist §. 28. DEA + EDA < 2 R.

Da §. 27. BDE > DEA: so ist I. §. 48. BDE + CED > DEA + CED. Nun ist §. 22. DEA + CED = 2 R. Folglich ist BDE + CED > 2 R.

§. 41.

Werden zwey gerade Linien AB, CD, von einer dritten EF geschnitten; und es sind die innern an einerley Seite liegenden Winkel BGH, DHG, zusammen zwey rechten Winkeln gleich; oder es ist der äußere Winkel EGB dem ihm an einerley Seite entgegengesetzten innern Winkel EHD, gleich; oder es sind die Wechselswinkel AGH, GHD einander gleich: so sind gedachte Linien, AB, CD, parallel. Fig. 22.

Ist BGH + GHD = 2 R.: so können AB, CD, an keiner Seite zusammenlaufen, weil sonst §. 40. BGH + GHD entweder <, oder > 2 R. seyn müßten. Folglich sind §. 39. AB, CD, parallel.

Ist EGB = EHD: so ist I. §. 46. EGB + BGH = EHD + BGH. Nun ist §. 22. EGB + BGH = 2 R. Folglich ist I. §. 45. EHD + BGH = 2 R. Folglich sind nach Obigen AB, CD, parallel.

Ist AGH = GHD, und §. 25. AGH = EGB: so ist I. §. 45. EGB = GHD. Folglich sind nach Obigen AB, CD, parallel.

§. 42.

Digitized by Google

§. 42.

Aufgabe: Eine gerade Linie soll durch einen Punkt G einer andern CD parallel gezogen werden. Fig. 22.

In CD nehme man willkührlich einen Punkt H, ziehe HG, mache §. 35. AGH = GHD, und verlängere AG nach B; so ist §. 41. AB der CD parallel.

§. 43.

Werden zwey gerade Linien, AB, CD, von einer dritten EF geschnitten, und es sind die innern an einerley Seite liegenden Winkel BGH, GHD, zusammen kleiner als zwey rechte Winkel: so sind gedachte Linien AB, CD, convergent, und laufen genugsam verlängert an derselben Seite zusammen. Fig. 23.

Da BGH + GHD < 2 R. und §. 22. EGB + BGH = 2 R. so ist EGB + BGH > BGH + GHD, folglich I. §. 46. EGB > GHD. Macht man nun §. 35. EGK = GHD, und verlängert KG nach L: so ist §. 42. LK der CD parallel. Nun gehet CD durch einen Punkt H innerhalb der Oefnung des Winkels LGB, und schneidet daher §. 4. Zus. wenigstens einen seiner Schenkel, LG, GB. Sie schneidet aber nicht den Schenkel LG, dem sie parallel ist. Folglich schneidet sie den andern Schenkel GB. Demnach sind AB, CD, convergent, und laufen an der Seite zusammen, wo die Winkel zusammen kleiner als zwey rechte Winkel sind.

§. 44.

Werden zwey gerade Linien, AB, CD, welche parallel sind, von einer dritten EF, geschnitten: so sind die innern an einerley Seite liegenden Winkel, BGH, DHG, zusammen zwey rechten Winkeln gleich; auch ist der äußere Winkel EGB dem ihm an einerley Seite

Digitized by Google

Seite entgegengesetzten innern Winkel DHG gleich; desgleichen sind auch die Wechselswinkel AGH, DHG, einander gleich. Fig. 22.

Sind AB, CD, parallel: so ist BGH + DHG weder < 2 R, noch > 2 R. weil sonst §. 43. AB, CD, an der einen oder an der andern Seite zusammenlaufen müßten. Folglich ist nothwendig BGH + DHG = 2 R.

Sind AB, CD, parallel: so ist nach Obigen BGH + DHG = 2 R. Nun ist auch §. 22. BGH + EGB = 2 R. Folglich ist I. §. 45. BGH + EGB = BGH + DHG, folglich I. §. 46. EGB = DHG.

Sind AB, CD, parallel: so ist nach Obigen EGB = DHG. Nun ist §. 25. EGB = AGH. Folglich ist I. §. 46. AGH = DHG.

§. 45.

Sind zwey gerade Linien, AB, CD, einer dritten EF, parallel: so sind sie selbst parallel. Fig. 24.

Es schneide eine gerade Linie GK gedachte drey Linien. Da AB der EF parallel: so ist §. 44. AGK = GKF; und da CD der EF parallel: so ist §. 44. GHD = GKF. Folglich ist I. §. 45. AGH = GHD. Folglich sind §. 41. AB, CD, parallel.

§. 46.

In jedem Triangel, ABC, dessen Seite BC, verlängert worden, ist der äußere Winkel ACD den beyden innern ihm entgegengesetzten Winkeln ABC, CBA, zusammen gleich; auch sind die drey innern Winkel zusammen zwey rechten Winkeln gleich. Fig. 25.

Da §. 27. ACD > ABC, so mache man §. 35. DCE = ABC. Folglich sind §. 41. AB, CE, parallel,

Digitized by Google

folglich §. 44. BAC = ACE. Nun war ABC = DCE. Folglich ist I. §. 46. ABC + BAC = DCE + ACE = ACD.

Da nach Obigen ABC + BAC = ACD: so ist I. §. 46. ABC + BAC + ACB = ACD + ACB. Nun ist §. 22. ACD + ACB = 2 R. Folglich ist I. §. 45. ABC + BAC + ACB = 2 R.

§. 47.

Eine vierseitige Figur, worinn jede Seite der ihr entgegengesetzten parallel ist, heißt ein **Parallelogramm**; jede andere vierseitige Figur aber ein **Trapez**. Ein **Rectangel** ist ein rechtwinklichtes Parallelogramm; und heißt ein **Quadrat**, wenn alle vier Seiten gleich sind, ein **Oblongum** aber, wenn nur die entgegengesetzten Seiten gleich sind. Ist das Parallelogramm schiefwinklicht: so heißt es ein **Rhombus**, wenn alle vier Seiten gleich sind; ein **Rhomboid** aber, wenn nur die entgegengesetzten Seiten gleich sind.

Zusatz. In jeder geradlinichten Figur sind §. 46. die Winkel zusammen vier rechten Winkeln gleich; weil sie von der Diagonale in zwey Triangel getheilt wird.

§. 48.

Sind in einer vierseitigen Figur ABCD, zwey Seiten, AB, CD, gleich und parallel: so sind die beyden andern Seiten, BC, DA, auch gleich und parallel. Fig. 26.

Man ziehe die Diagonale BD. Da AB, CD, parallel: so ist §. 44. ABD = BDC. Nun ist AB = CD; BD = BD. Folglich ist §. 14. AD = BC, und BDA = CBD. Folglich §. 41. AD, BC, auch parallel.

§. 49.

Digitized by Google

§. 49.

In jedem Parallelogramm ABCD, sind die entgegengesetzten Seiten und Winkel einander gleich. Fig. 26.

Man ziehe die Diagonale BD. Da AB, CD, parallel: so ist §. 44. ABD = BDC. Eben so, da BC, AD parallel, ist §. 44. ADB = CBD. Nun ist BD = BD. Folglich ist §. 38. △ABD = △CBD, AB = CD, AD = BC, und BAD = BCD. Auch ist I. §. 46. ABC = ADC.

Zusatz. 1. Jedes Parallelogramm wird von der Diagonale halbirt, weil △ABD = △CBD.

2. Alle Perpendikel, AD, BC, zwischen zwey Parallellinien AB, CD, sind einander gleich; weil ADC + BCD = 2 R, folglich §. 41. auch AD, BC, parallel, folglich §. 47. ABCD ein Parallelogramm.

3. Zwey Parallelogramme decken sich und sind einander gleich, wenn zwey Seiten und der davon eingeschlossene Winkel des einen, zweyen Seiten und dem davon eingeschlossenen Winkel des andern gleich sind.

4. Daher sind zwey Quadrate einander gleich, wenn die Seite des einen der Seite des andern gleich ist.

§. 50.

Jedes Parallelogramm ABCD wird von einer geraden Linie FG, welche man durch die Mitte der Diagonale E willkürlich legt, halbiret. Fig. 26.

Da AB, CD, parallel, so ist §. 44. BFE = EGD. Nun ist auch §. 25. BEF = GED. Auch ist BE = ED. Folglich ist §. 38. △EBF = △EGD.

Digitized by Google

Nun ist §. 49. Zus. 1. △ABD = △CBD. Folglich ist I. §. 46. ADEF = BCGE. Nun war △EGD = △EBF. Folglich ist I. §. 46. ADGF = BCGF.

§. 51.

Aufgabe: Ein Parallelogramm zu beschreiben, wozu zwey Seiten, BC, CD, und der davon eingeschlossene Winkel BCD, gegeben sind. Fig. 26.

Man ziehe §. 42. der CD durch B die BA, und der BC durch D die DA parallel: so ist §. 47. das Parallelogramm ABCD vollendet.

Zusatz. Zu einem Rhombus braucht außer dem Winkel nur eine Seite; zu einem Oblongum brauchen nur zwey Seiten; zu einem Quadrate braucht nur eine Seite gegeben zu seyn, und man nennt die Figur das Quadrat der gegebenen Seite, oder das Rectangel der beyden gegebenen Seiten.

IV. Verwandlung geradlinichter Figuren.

§. 52.

Die Höhe einer geradlinichten Figur ist der von ihrer Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel. Ist durch die Spitze der Figur eine gerade Linie der Grundlinie parallel gezogen: so ist §. 49. Zus. 2. jeder Perpendikel zwischen diesen Parallellinien mit der Höhe der Figur einerley; und man sagt die Figur sey in dieser Parallelen, worinn sich die entgegengesetzten Grenzen der Figur enden. Daher haben alle Figuren in zwey Parallellinien einerley Höhe.

§. 53.

Digitized by Google

§. 53.

Parallelogramme AE, AD, auf ein und derselben Grundlinie AB, und in gleicher Höhe, sind einander gleich. Fig. 27.

Da §. 49. AB = CE = FD: so ist I. §. 46. CF = ED. Nun ist auch §. 49. CA = EB, und AF = BD. Folglich ist §. 17. △CAF = △EBD, folglich I. §. 46. CAGE = FGBD, folglich I. §. 46. AE = AD.

§. 54.

Parallelogramme AC, EG, auf gleichen Grundlinien BC, FG, und in gleicher Höhe, sind einander gleich. Fig. 28.

Ziehet man BE, CH: so ist §. 53. AC = BH, und EG = BH; folglich I. §. 45. AC = EG.

§. 55.

Triangel ABC, DBC, auf ein und derselben Grundlinie BC und in gleicher Höhe, sind einander gleich. Fig. 29.

Vollendet man §. 51. die Parallelogramme EC, BF: so ist §. 53. EC = BF. Nun ist §. 49. Zus. 1. △ABC = $\frac{1}{2}$EC, und △DBC = $\frac{1}{2}$BF. Folglich ist I. §. 47. △ABC = △DBC.

§. 56.

Triangel ABC, DEF, auf gleichen Grundlinien, BC, EF, und in gleicher Höhe, sind einander gleich. Fig. 30.

Vollendet man §. 51. die Parallelogramme CG, EH; so ist §. 54. CG = EH. Nun ist §. 49. Zus. 1. △ABC = $\frac{1}{2}$CG, und △DEF = $\frac{1}{2}$EH: Folglich ist I. §. 47. △ABC = △DEF.

Digitized by Google

§. 57.

Gleiche Triangel ABC, DBC, auf ein und derselben Grundlinie BC, sind in gleicher Höhe. Fig. 31.

Man ziehe AD. Gesetzt nun AD wäre der BC nicht parallel (§. 52.) so sey es eine andre, etwa AE. Demnach wäre §. 55. △ABC = △EBC. Nun ist angenommen △ABC = △DBC. Folglich wäre I. §. 45. △EBC = △DBC, welches I. §. 44. unmöglich ist.

§. 58.

Gleiche Triangel ABC, DEF, auf gleichen Grundlinien BC, EF, sind in gleicher Höhe. Fig. 32.

Man ziehe AD. Gesetzt nun AD wäre der BF nicht parallel (§. 52.) so sey es eine andre, etwa AG. Demnach wäre §. 56. △ABC = △GEF. Nun ist angenommen, △ABC = △DEF. Folglich wäre I. §. 45. △GEF = △DEF, welches I. §. 44. unmöglich ist.

§. 59.

Ein Parallelogramm ABCD, ist doppelt so groß als ein Triangel EBC, wenn beyde auf ein und derselben Grundlinie BC, und in gleicher Höhe sind. Fig. 33.

Ziehet man die Diagonale AC: so ist §. 55. △ABC = △EBC, folglich I. §. 47. 2△ABC = 2△EBC. Nun ist §. 49. ABCD = 2△ABC. Folglich ist I. §. 45. ABCD = 2△EBC.

§. 60.

Aufgabe: Jeden Triangel ABC in ein Parallelogramm, wozu ein Winkel D gegeben ist, zu verwandeln. Fig. 34.

Man

Man halbire §. 19. BC in E, ziehe AE, und mache §. 35. CEF = D. Man ziehe §. 42. der BC durch A die AG, und der EF durch C die CG parallel: so ist §. 59. EG = 2 △AEC. Nun ist §. 56. △ABE = △AEC, und daher △ABC = 2 △AEC. Folglich ist I. §. 45. EG = △ABC.

§. 61.

Jedes Parallelogramm ABCD, wird, wenn man durch einen willkürlichen Punkt der Diagonale, K, mit den einschließenden Seiten DA, AB, Parallelen EF, HG, legt, in vier Parallelogramme getheilt; so daß die beyden Parallelogramme durch welche die Diagonale nicht gehet, HF, EG, einander gleich sind. Fig. 35.

Da §. 49. Zus. 1. △ABC = △ADC, und △AEK = △AHK: so ist I. §. 46. EKCB = HKCD. Nun ist auch §. 49. Zus. 1 △KGC = △KFC. Folglich ist I. §. 46. EG = HF.

§. 62.

Jedes Quadrat ABCD, wird, wenn man durch einen willkürlichen Punkt der Diagonale K mit den einschließenden Seiten BA, AD, Parallelen GH, EF, legt, in vier Parallelogramme getheilt; so daß die beyden Parallelogramme, durch welche die Diagonale gehet, EH, GF, auch Quadrate sind. Fig. 36.

Da BA = AD: so ist §. 15. ABD = ADB. Nun ist §. 44. EKB = ADB. Folglich ist I. §. 45. ABD = EKB. Folglich ist §. 16. BE = EK, folglich §. 49. EH gleichseitig. Nun ist §. 44. BEK = BAD = R. Folglich ist §. 49. EH auch rechtwinklicht, folglich §. 47. ein Quadrat. Auf eben die Art beweist man, daß auch GF ein Quadrat sey.

Digitized by Google

§. 63.

Aufgabe: Jeden Triangel ABC in ein Parallelogramm, wozu ein Winkel D und eine Seite E gegeben ist, zu verwandeln. Fig. 37.

Man verwandle §. 60. den Triangel ABC in das Parallelogramm FH, worinn CFG = D sey. Man verlängere GH nach K, mache HK = E, ziehe KC, und verlängere sie bis sie §. 40. von der verlängerten GF in L geschnitten wird. Man ziehe §. 42. der GK durch L die LM, und der GL durch K die KM parallel, und verlängre HC nach O, und FC nach N: so ist §. 49, OM = HK = E, und §. 44. MOC = OLF = CFG = D, und §. 61. ON = FH = △ABC.

§. 64.

Aufgabe: Jede geradlinichte Figur ABCD, in ein Parallelogramm, wozu ein Winkel E gegeben ist, zu verwandeln. Fig. 38.

Man ziehe DB, und verwandle §. 60. △ABD in das Parallelogramm FH, worinn FKH = E sey. Ferner verwandle man §. 63. △BCD in das Parallelogramm HL, worinn GHM = FKH, und GH = FK sey: so ist FM das verlangte Parallelogramm.

Da GHM = FKH: so ist I. §. 46. GHM + GHK = FKH + GHK. Nun ist §. 44. FKH + GHK = 2 R. Folglich ist I. §. 45. GHM + GHK = 2 R. Folglich ist §. 23. KHM eine gerade Linie. Eben so beweist man auch, daß FGL eine gerade Linie ist. Nun ist FK und LM der GH gleich und parallel. Folglich ist §. 45. und I. §. 45. FK der LM gleich und parallel. Folglich ist §. 48. FL der KM gleich und parallel. Folglich ist §. 47. FM ein Parallelogramm, worinn FKM = E. Auch ist FM = FH + HL = △ABD + △BCD = ABCD.

Zusatz.

Digitized by Google

Zusatz. Hieraus erhellet zugleich, wie man zwey Parallelogramme, mit einer gleichen Seite FK, GH, und einem gleichen Winkel FKH, GHM, so zusammensetzen, oder von einander wegnehmen könne, daß Summe und Differenz ein Parallelogramm sey.

§. 65.

In jedem rechtwinklichten Triangel, BAC, ist das Quadrat der Hypothenuse BE, den Quadraten der Katheten BG, AK, zusammen gleich. Fig. 39.

Man ziehe AE, BK und §. 42. der EC durch A die AL parallel. Auch ist §. 23. wegen der rechten Winkel bey A die BAH eine gerade Linie, und daher der CK parallel. Nun ist §. 24. BCE = ACK, folglich I. §. 46. ACE = BCK. Auch ist §. 47. AC = CK und CE = BC. Folglich ist §. 14. △ACE = △BCK. Nun ist §. 59. CL = 2△ACE und AK = 2△BCK. Folglich ist I. §. 47. CL = AK.

Auf eben die Art, wenn man AD, CF, ziehet, beweist man auch, daß LB = BG. Folglich ist I. §. 46. BE = CL + LB = AK + BG, das ist, $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

Zusatz. Hieraus erhellet zugleich, wie man zwey Quadrate so zusammensetzen könne, daß sie zusammen ein Quadrat ausmachen.

§. 66.

Ist in einem Triangel ABC, das Quadrat der einen Seite BC den Quadraten der beyden übrigen BA, AC, zusammen gleich: so schließen letztre einen rechten Winkel BAC ein. Fig. 40.

Man mache §. 35. CAD = R. und §. 13. AD = BA, ziehe DC: so ist §. 65. $CD^2 = AC^2 + AD^2$. Nun ist angenommen $BC^2 = AC^2 + BA^2 = AC^2 + AD^2$. Folg-

Digitized by Google

lich ist I. §. 45. $CD^q = BC^q$ folglich I. §. 50. CD = BC. Nun ist AD = BA, und AC = AC. Folglich ist §. 17. CAD = BAC. Nun war CAD = R. Folglich ist I. §. 45. BAC = R.

V. Lehre von dem Cirkel.

§. 67.

Cirkel heißen concentrisch, wenn sie mit verschiednen Halbmessern aus ein und demselben Mittelpunkte gezogen sind. Cirkel schneiden einander, wenn die Peripherie des einen zum Theil innerhalb, zum Theil außerhalb des andern liegt. Cirkel berühren einander, wenn sie zusammentreffen, ohne einander zu schneiden. Ein Cirkel berührt den andern inwendig oder auswendig, je nachdem er ganz innerhalb oder außerhalb des andern liegt. Eine gerade Linie berührt den Cirkel, wenn sie ihn trift ohne ihn zu schneiden, und heißt alsdenn eine Tangente des Cirkels.

§. 68.

In einer geraden Linie DE, von welcher die Sehne eines Cirkels AB, in der Mitte C, senkrecht geschnitten wird, ist der Mittelpunkt. Fig. 41.

Gesetzt der Mittelpunkt wäre außerhalb DE, etwa in G, und man ziehet GA, GC, GB: so ist §. 11. Zus. 1. GA = GB. Nun ist AC = CB, GC = GC. Folglich wäre §. 17. GCA = GCB = R. Nun ist auch DCA = R. Folglich wäre §. 24. GCA = DCA, welches I. §. 44. unmöglich ist.

Zusatz. Man findet demnach den Mittelpunkt eines Cirkels, wenn man §. 20. auf einer beliebigen Sehne AB in der Mitte C einen Perpendikel CD errichtet, solchen nach E verlängert und alsdenn in F halbirt.

§. 69.

Digitized by Google

§. 69.

Eine gerade Linie EDF durch den Mittelpunkt eines Cirkels D, schneidet die Sehne, AB, senkrecht, wenn sie selbige halbirt; und halbirt die Sehne AB, wenn sie selbige senkrecht schneidet. Fig. 24.

Ist C die Mitte der Sehne, und man ziehet DA, DB: so ist AC = CB, DA = DB, DC = DC; folglich §. 17. ACD = DCB, folglich §. 8. DC senkrecht.

Ist EF senkrecht: so ist §. 8. ACD = DCB. Nun ist DA = DB und daher §. 15. DAC = DBC. Folglich ist §. 38. AC = CB.

Zusatz. Ein gleichschenklichter Triangel DAB, wird von dem Perpendikel DC, der von der Spitze D auf die Grundlinie AB fällt, halbiret.

§. 70.

Zwey Sehnen eines Cirkels AB, CD, welche einander schneiden, können nicht beyde einander halbiren. Fig. 43.

Gesetzt es wäre DE = EC, und AE = EB; so verbinde man E mit dem Mittelpunkte F. Folglich wäre §. 69. FE auf AB und CD in E senkrecht, folglich §. 8. 24. AEF = DEF, welches I. §. 44. unmöglich ist.

§. 71.

Zwey Cirkel, welche einander schneiden, oder berühren, sind nicht concentrisch. Fig. 49. 50. 51.

Gesetzt die Cirkel Fig. 49. die sich in A und B schneiden, hätten einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt C (§. 67.) und man ziehet CA, und willkürlich CE: so ist §. 11. Zus. 1. CA = CD, und CA = CE, folglich I. §. 45. CD = CE, welches I. §. 44. unmöglich ist.

Die

Digitized by Google

Die Cirkel Fig. 50. die einander auswendig in A berühren, können keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben; weil §. 67. jeder ganz außerhalb des andern liegt.

Gesetzt die Cirkel Fig. 51. die einander inwendig in A berühren, hätten einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt C, und man ziehet CA, und willkürlich CD: so ist §. 11. Zus. 1. CA = CB, und CA = CD, folglich I. §. 45. CB = CD, welches I. §. 44. unmöglich ist.

§. 72.

Gehen von einem beliebigen Punkte innerhalb eines Cirkels, A, der nicht der Mittelpunkt ist, mehrere gerade Linien AB, AD, AE, AF, AG, bis an die Peripherie: so ist unter allen diesen die, welche den Mittelpunkt C trift, AB, die größeste, und die ihr nähere AD größer als die entferntere AE; die aber, welche verlängert den Mittelpunkt C trift, AG, die kleineste, und die ihr nähere AF, kleiner als die entferntere AE. Fig. 44.

Man ziehe CD, CE, CF. Da §. 32. AC + CD > AD, und §. 11. Zus. 1. CD = CB: so ist AB > AD. Da ferner §. 11. Zus. 1. DC = EC, auch CA = CA, und DCA > ECA: so ist §. 36. AD > AE. Ferner ist aus eben dem Grunde AE > AF. Endlich ist §. 32. CA + AF > CF, aber §. 11. Zus. 1. CF = CG = CA + AG; folglich CA + AF > CA + AG, folglich I. §. 48. AF > AG. Demnach ist AB > AD > AE > AF > AG.

Zusatz. Hieraus erhellet zugleich, daß zu beyden Seiten der größesten AB, oder kleinsten AG, nur je zwey gleiche gerade Linien vom gedachten Punkte A bis an die Peripherie gehen können.

Denn

Digitized by Google

Denn macht man §. 35. ACH = ACF, und ziehet AH: so ist auch CF = CH, CA = CA, folglich §. 14. AH = AF. Nun ist außer AH keine andre der AF gleich. Denn AL ist < AH und AK > AH.

§. 73.

Gehen von einem beliebigen Punkte außerhalb eines Cirkels mehrere gerade Linien bis an die Peripherie nach außen und nach innen: so ist unter denen nach innen, AB, AD, AE, AF, die welche den Mittelpunkt C trift, AB, die größeste, und die ihr nähere AD, größer als die entferntere AE; unter denen nach außen aber, AL, AK, AH, AG, die welche verlängert den Mittelpunkt C trift, AL, die kleinste, und die ihr nähere AK, kleiner als die entferntere AH. Fig. 45.

Man ziehe CD, CE, CF. Da §. 32. AC + CD > AD, und §. 11. Zus. 1. CD = CB: so ist AB > AD. Da ferner CD = CE, AC = AC, ACD > ACE: so ist §. 36. AD > AE. Aus gleichem Grunde ist auch AE > AF. Demnach ist AB > AD > AE > AF.

Man ziehe CG, CH, CK. Da §. 32. AL + LC < AK + KC, und §. 11. Zus. 1. LC = KC: so ist I. §. 48. AL < AK. Da ferner §. 33. AH + KC < AH + HC: so ist I. §. 48. AK < AH. Aus eben dem Grunde ist auch AH < AG. Demnach ist AL < AK < AH < AG.

Zusatz. Hieraus erhellet wie §. 72. daß zu beyden Seiten der größten oder der kleinsten nur je zwey gleiche gerade Linien von obgedachtem Punkte A bis an die Peripherie gehen können.

§. 74.

Ein Punkt innerhalb eines Cirkels, C, von welchem mehr als zwey gleiche gerade Linien, CA, CB,

Digitized by Google

CB, CD, bis an die Peripherie gehen, ist der Mittelpunkt. Fig. 46.

Gesetzt es wäre nicht C, sondern ein anderer, etwa E, der Mittelpunkt, und man ziehet CE, die man zu beyden Seiten verlängert: so wäre §. 72. CA < CB < CD, da doch CA = CB = CD seyn soll.

§. 75.

Zwey Cirkel schneiden einander nur in zwey Punkten. Fig. 52.

Gesetzt der Cirkel, dessen Mittelpunkt C, würde von irgend einem andern in drey Punkten A, B, D, geschnitten: so wäre §. 11. 74. C der Mittelpunkt des einen sowohl als des andern Cirkels, welches §. 71. unmöglich ist.

§. 76.

Berühren zwey Cirkel einander: so gehet die gerade Linie, welche die beyderseitigen Mittelpunkte verbindet, durch den Berührungspunkt A. Fig 53. 54.

Zuerst berühre Fig. 54. ein Cirkel, dessen Mittelpunkt B, den andern von innen in A, und man ziehe AB, und verlängere sie bis G. Wäre nun des andern Cirkels Mittelpunkt nicht in AG: so sey er irgendwo ausser ihr etwa in C. Man ziehe CA, CB, und verlängre letztre zu beyden Seiten. Da §. 32. CB + BA > AC und §. 11. Zus. 1. AC = CD = CB + BD: so ist CB + BA > CB + BD, folglich I. §. 48. BA > BD. Nun ist §. 11. Zus. 1. BA = BF. Folglich wäre BF > BD, welches I. §. 44. unmöglich ist.

Zweytens berühre Fig. 53. ein Cirkel den andern von aussen in A. Gesetzt nun irgend eine gerade Linie DE, die nicht durch den Berührungspunkt A gehet, verbände beyderseitige Mittelpunkte D, E, und man ziehet AD,

Digitized by Google

AD, AE: so wäre §. 11. Zus. 1. DA = DF, und AE = EG, folglich I. §. 46. DA + AE = DF + EG, folglich DA + AE < DE, welches §. 32. unmöglich ist.

§. 77.

Zwey Cirkel berühren einander nur in einem Punkte A. Fig. 50. 51.

Gesetzt Fig. 51. der Cirkel, dessen Mittelpunkt E, berührte den andern, dessen Mittelpunkt F, inwendig in A, und noch in einem andern Punkte: so müßte derselbe §. 76. von der verlängerten EF getroffen werden, wie G. Folglich wäre AE = EG, folglich AE > FG, und noch vielmehr AF > FG, welches §. 11. Zus. 1. unmöglich ist.

Gesetzt die Cirkel Fig. 50. deren Mittelpunkte B, C, berührten einander auswendig in A, und noch in einem andern Punkte D, der also außer der Linie BC, läge: so müßte §. 76. BC auch durch D gehen, und also D auch zugleich in der Linie BC liegen, welches unmöglich ist.

§. 78.

Sehnen eines Cirkels, AB, DE, liegen gleichweit vom Mittelpunkte C, wenn sie einander gleich sind; und sind einander gleich, wenn sie gleichweit vom Mittelpunkte liegen. Fig. 47.

Ist erstlich AB = DE, so sey §. 21. CF auf AB, und CG auf DE senkrecht, folglich §. 69. AB, DE, in F, G, halbirt, folglich I. §. 47. AF = EG, folglich I. §. 50. $AF^q = EG^q$. Da auch §. 11. Zus. 1. CA = CE, so ist $CA^q = CE^q$. Nun ist §. 65. $CA^q = AF^q + CF^q$ und $CE^q = EG^q + CG^q$. Folglich ist I. §. 45. $AF^q + CF^q = EG^q + CG^q$, folglich I. §. 46. $CF^q = CG^q$ folglich I. §. 50. CF = CG. §. 30. Zus.

Ist

Ist zweytens CF = CG §. 30. Zus. folglich I. §. 50. $CF^q = CG^q$, und wie zuvor $AF^q + CF^q = EG^q + CG^q$: so ist I. §. 46. $AF^q = EG^q$, folglich I. §. 50. AF = EG. Nun ist §. 69. $AF = \frac{1}{2}AB$ und $EG = \frac{1}{2}DE$. Folglich ist I. §. 47. AB = DE.

§. 79.

In jedem Cirkel ist der Durchmesser AB die größte gerade Linie, und unter den übrigen die dem Mittelpunkte C nähere DE, größer als die entferntere FG. Fig. 48.

Es sey §. 21. CH auf DE, und CK auf FG senkrecht, folglich §. 30. Zus. CK > CH. Macht man CL = CH und §. 20. MLN auf CF senkrecht: so ist §. 78. MN = DE. Nun ist §. 11. Zus. 1. CM = CG, und CN = CF, aber MCN > GCF, folglich §. 36. MN > GF. Folglich ist auch DE > GF.

Da §. 32. MC + CN > MN, und §. 11. Zus. 1. MC = AC, CN = CB: so ist AC + CB < MN. Demnach ist AB > MN > GF.

§. 80.

Ein Perpendikel AD, auf eines Cirkels Durchmesser BA, in seinem Endpunkte A, fällt ganz außerhalb des Cirkels, und zwischen ihm und dem Cirkelbogen keine gerade Linie. Fig. 55.

Gesetzt es fiel ein Perpendikel AE, innerhalb des Cirkels, so daß also CAE ein rechter Winkel wäre. Ziehet man nun CE, so ist §. 11. Zus. 1. CE = CA, folglich §. 15. CEA = CAE = R, und daher CEA + CAE = 2 R. welches §. 28. unmöglich ist.

Gesetzt es fiel zwischen dem Perpendikel AD, und dem Bogen AE, eine gerade AG; so sey §. 21. CH auf AG

Digitized by Google

AG senkrecht. Folglich wäre §. 28. AC > CH. Nun ist §. 11. Zus. 1. AC = CF. Folglich wäre CF > CH, welches I. §. 44. unmöglich ist.

Zusatz. Ein auf dem Durchmesser im Endpunkte errichteter Perpendikel trift also den Cirkel ohne ihn zu schneiden, und ist daher §. 67. eine Berührungslinie oder Tangente, welche den Cirkel nur in einem Punkte berühren kann.

§. 81.

Aufgabe: Von einem Punkte außerhalb eines Cirkels A eine Tangente zu ziehen. Fig. 56.

Man ziehe AC, und errichte §. 20. auf solcher in B den Perpendikel BD. Aus C ziehe man mit CA einen Cirkel. Endlich ziehe man DC, AE: so ist letztre die verlangte Tangente.

Denn da §. 11. Zus. 1. AC = DC, und CE = CB, auch ACE = DCB: so ist §. 14. AEC = DBC = R. folglich §. 80. AE eine Tangente.

§. 82.

Auf der Tangente eines Cirkels AB, ist die gerade Linie CD, vom Mittelpunkte C, nach dem Berührungspunkte D, senkrecht. Fig. 57.

Gesetzt, es wäre nicht CD, sondern irgend eine andre, etwa CE auf AB senkrecht, §. 21, so wäre §. 28. CD > CE. Nun ist CD = CF. Folglich wäre CF > CE, welches unmöglich ist.

§. 83.

Ist auf der Tangente eines Cirkels AB, im Berührungspunkte D, eine gerade Linie ED, senkrecht: so ist in solcher der Mittelpunkt des Cirkels. Fig 58.

Digitized by Google

Gesetzt der Mittelpunkt wäre nicht in ED, sondern irgendwo anders, etwa in F, und man ziehet FD: so ist solche §. 82. auf AB senkrecht. Nun ist angenommen, daß auch ED senkrecht. Folglich wäre §. 24. FDB = EDB, welches unmöglich ist.

§. 84.

Ein **Peripheriewinkel** ist, dessen Spitze ein Punkt der Peripherie und dessen Schenkel Sehnen des Cirkels sind. Ein **Centriwinkel** ist, dessen Spitze der Mittelpunkt, und dessen Schenkel Halbmesser des Cirkels sind. Beyde stehen auf den Bogen, den ihre Schenkel abschneiden. Ein **Ausschnitt** oder **Sector** des Cirkels ist die Figur, welche von zwey Halbmessern und dem abgeschnittenen Bogen begrenzt wird. Ein **Abschnitt** oder **Segment** des Cirkels ist die Figur, welche von einer geraden Linie und dem abgeschnittnen Bogen begrenzt wird. Solche gerade Linie heißt die **Grundlinie** des Abschnitts. Von den gleichen Abschnitten, deren Grundlinie der Halbmesser, ist jeder ein **halber Cirkel**; von den ungleichen Abschnitten aber, deren Grundlinie eine Sehne, ist der mit dem Mittelpunkte **größer**, und der ihm entgegengesetzte **kleiner** als ein halber Cirkel. Der **Winkel im Abschnitte** ist, dessen Spitze ein Punkt des Bogens, und dessen Schenkel von solchem Punkte nach den Endpunkten der Grundlinie gehen.

§. 85.

In jedem Cirkel ist der Centriwinkel BCD doppelt so groß als der Peripheriewinkel BAD, wenn beyde auf einerley Bogen BD, stehen. Fig. 59. 60.

Ist Fig. 59. des Cirkels Mittelpunkt zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels BAD, und man ziehet AC und verlängert solche bis E: so ist §. 11. Zus. 1.

AC

AC = CB, folglich §. 15. CAB = CBA, folglich §. 27. BCE = 2 CAB. Nun ist aus eben dem Grunde ECD = 2 CAD. Folglich ist I. §. 46. BCD = 2 BAD.

Ist Fig. 60. der Mittelpunkt außerhalb der Schenkel, und man ziehet ACE: so ist wiederum wie vorher ECD = 2 EAD, und ECB = 2 EAB, folglich I. §. 46. BCD = 2 BAD.

§. 86.

Alle Winkel in ein und demselben Abschnitte, BAD, BED sind einander gleich. Fig. 61.

Es sey §. 68. des Cirkels Mittelpunkt C, und man ziehe CB, CD: so ist §. 85. BCD = 2 BAD = 2 BED, folglich I. §. 47. BAD = BED.

§. 87.

In jedem Cirkel ist der Winkel in einem Abschnitte ABC, nebst dem Winkel in dem entgegengesetzten Abschnitte CDA, zusammen zwey rechten Winkeln gleich. Fig. 62.

Ziehet man BD: so ist §. 86. CBD = DAC und DBA = ACD, folglich I. §. 46. ABC = DAC + ACD, folglich I. §. 46. ABC + CDA = DAC + ACD + CDA = 2 R. (§. 46.)

Auf eben die Art beweiset man, daß auch BAD + DCB = 2 R.

Zusatz. Hieraus erhellet, daß je zwey entgegengesetzte Winkel einer jeden vierseitigen Figur im Cirkel ABCD, zusammen zwey rechten Winkeln gleich sind.

§. 88.

Zwey Abschnitte AEB, CFD, auf gleichen Grundlinien, und mit gleichen Winkeln, sind einander gleich. Fig. 63. 64.

Digitized by Google

Da AB = CD, so fällt C auf A und D auf B, §. 7. Alsdenn muß auch der Bogen CFD, auf den Bogen AEB, fallen, folglich §. 7. der eine Abschnitt dem andern gleich seyn.

Denn fiel CFD nicht auf AED, sondern etwa darüber wie Fig. 64. und man ziehet AEF, FB, EB: so ist §. 27. AEB > CFD, da doch angenommen, daß AEB = CFD ist.

Zusatz. Hieraus erhellet auch, daß der Durchmesser die Fläche sowohl, als die Peripherie des Cirkels halbiret.

§. 89.

Aufgabe: Einen Cirkel, dessen Abschnitt ABC gegeben ist, zu beschreiben. Fig. 65. 66. 67.

Man halbire §. 19. des Abschnitts Grundlinie AC in D, errichte §. 20. auf AC in D den Perpendikel DB, und ziehe AB:

Es sey zuerst Fig. 65. DAB = DBA, folglich §. 16. DA = DB. Nun ist auch DA = DC, folglich I. §. 45. DB = DC. Folglich ist §. 74. D der Mittelpunkt des verlangten Cirkels.

Es sey zweytens Fig. 66. DAB < DBA. Man mache §. 35. BAE = DBA, verlängre BD bis E, und ziehe EC: so ist §. 16. AE = EB. Nun ist AD = DC, DE = DE, ADE = EDC, folglich §. 14. AE = EC. Folglich ist auch I. §. 45. EB = EC. Demnach ist §. 74. E der Mittelpunkt des verlangten Cirkels.

Es sey drittens Fig. 67. DAB > DBA. Macht man §. 35. BAE = DBA, und ziehet EC; so wird wie zuvor bewiesen, daß EA = EB = EC, folglich §. 74. E der Mittelpunkt des verlangten Cirkels sey.

§. 90.

Digitized by Google

§. 90.

In gleichen Cirkeln stehen Winkel ACB, EDF, auf gleichen Bogen AKB, ELF, wenn sie einander gleich sind; und sind einander gleich, wenn sie auf gleichen Bogen stehen. Fig. 68.

Ist erstlich ACB = EDF, folglich §. 85. AGB = EHF, und man ziehet AB, EF: so ist §. 11. Zus. 6. AC = CB = ED = EF, folglich §. 14. AB = EF, folglich §. 88. AGB = EHF, folglich §. 11. Zus. 6. und I. §. 46. AKB = ELF.

Ist zweytens AKB = ELF: so sage ich, daß ACB = EDF folglich auch §. 85. AGB = EHF. Denn wäre nicht ACB = EDF: so sey ACM = EDF, folglich nach obigen AKM = ELF. Nun ist angenommen AKB = ELF, folglich wäre I. §. 45. AKM = AKB, welches I. §. 44. unmöglich ist.

Zusatz. Hieraus erhellet, daß auch die Ausschnitte ACB, EDF, welche gleiche Bogen AKB, ELF, abschneiden, einander gleich seyn müssen.

§. 91.

In gleichen Cirkeln werden von gleichen Sehnen, AB, EF, gleiche Bogen AKB, ELF; und von gleichen Bogen gleiche Sehnen abgeschnitten. Fig. 68.

Ist erstlich AB = EF: so ist §. 17. ACB = EDF folglich §. 90. AKB = ELF.

Ist zweytens AKB = ELF: so ist §. 90. ACB = EDF, folglich §. 14. AB = EF.

§. 92.

Aufgabe: Jeden Cirkelbogen AEFC zu halbiren. Fig. 69.

Digitized by Google

Ziehet man AC, halbirt sie in D, errichtet den Perpendikel DB, und ziehet AB, BC: so ist §. 14. AB=BC, folglich §. 91. AEB = BFC.

§. 93.

Der Winkel im halben Cirkel ADB, ist ein rechter Winkel; der im größern Abschnitte DAB, kleiner; der im kleinern Abschnitte BED, größer, als ein rechter Winkel. Fig. 70.

Man verlängre AD nach F, und ziehe DC. Da §. 11. Zus. 1. CA = CD = CB: so ist §. 15. CDA = CAD, und CDB = CBD, folglich I. §. 46. ADB = CAD + CBD. Nun ist §. 27. FDB = CAD + CBD. Folglich ist I. §. 45. ADB = FDB, folglich §. 8. ADB ein rechter Winkel, folglich §. 46. DAB < R, folglich §. 87. BED > R.

Zusatz. Ist daher in einem Triangel ABD ein Winkel ADB den beyden übrigen zusammen gleich: so ist er ein rechter Winkel; und so auch umgekehrt.

§. 94.

Wird vom Berührungspunkte D einer Tangente AB eine Sehne DE gezogen: so ist der Winkel, den solche mit der Tangente einschließt EDB, dem Winkel in dem entgegengesetzten Abschnitte DFE, gleich. Fig. 71.

Es sey §. 20. DF senkrecht auf AB, und FE gezogen: so ist §. 83. DF der Durchmesser, folglich §. 93. FED ein rechter Winkel, folglich §. 24. FED = FDB. Nun ist FDB = FDE + EDB, und §. 93. Zus. FED = FDE + DFE. Folglich ist FDE + EDB = FDE + DFE, folglich I. §. 46. EDB = DFE.

Zusatz.

Digitized by Google

Zusatz. Hieraus erhellet, daß auch EDA dem Winkel in dem entgegengesetzten Abschnitte EGD gleich sey; weil §. 22. EDB + EDA = 2 R. und §. 87. DFE + EGD = 2 R.

§. 95.

Aufgabe: Auf jeder geraden Linie AB einen Abschnitt, wozu der Winkel D gegeben ist, zu beschreiben. Fig. 72. 73. 74.

Es sey zuerst Fig. 72. D < R. Es sey §. 35. BAE = D und §. 20. AF senkrecht auf AE, auch §. 19. AB in G halbirt und §. 20. GC senkrecht auf AB: so ist §. 14. AC = CB, folglich C der Mittelpunkt eines Cirkels durch A und B, und §. 94. AFB = BAE = D.

Es sey zweytens Fig. 73. D = R. Es sey §. 35. BAE = D, und §. 19. AB in C halbirt: so ist C der Mittelpunkt eines Cirkels durch A und B, und §. 94. AGB = BAE = D.

Es sey drittens Fig. 74. D > R. Es sey §. 35. BAE = D und §. 20. AF auf AE senkrecht, auch §. 19. AB in G halbirt, und §. 20. GC auf AB senkrecht: so ist §. 14. AC = CB, folglich C der Mittelpunkt eines Cirkels durch A und B, und §. 94. AHB = BAE = D.

§. 96.

Von jedem Cirkel einen Abschnitt, wozu der Winkel D gegeben ist, abzuschneiden. Fig. 75.

Es sey §. 80. AB eine Tangente in E, und §. 35. BEF = D: so ist §. 94. EGF = BEF = D.

Digitized by Google

VI. Geradlinichte Figuren am Cirkel.

§. 97.

Eine gerade Linie ist in einem Cirkel eingetragen, wenn sie eine Sehne des Cirkels ist, da sie denn kleiner, als der Durchmesser seyn muß. Eine geradlinichte Figur ist in einem Cirkel, oder auch ein Cirkel ist um eine geradlinichte Figur beschrieben, wenn jede Seite der geradlinichten Figur eine Sehne des Cirkels ist, doch kann auch eine dieser Seiten der Durchmesser seyn. Eine geradlinichte Figur ist um einen Cirkel, oder auch ein Cirkel ist in einer geradlinichten Figur beschrieben, wenn jede Seite der geradlinichten Figur eine Tangente des Cirkels ist.

§. 98.

Aufgabe: In jedem Cirkel eine gerade Linie D, die kleiner als der Durchmesser ist, einzutragen. Fig. 76.

Man ziehe den Durchmesser AB, mache §. 13. AE = D, beschreibe aus A mit AE einen Cirkel, und ziehe AF: so ist AF = AE = D.

§. 98. *

Aufgabe: Es sind zwey ungleiche gerade Linien AB, BG, gegeben; man soll eine Linie finden, deren Quadrat mit dem Quadrate der kleinern gegebenen Linie BG, zusammen dem Quadrate der größern AB, gleich sey. Fig. 73.

Man halbire AB in C, beschreibe aus C mit CA einen Cirkel, trage §. 98. in denselben BG, und ziehe GA: so ist solche die verlangte Linie.

Denn da §. 93. AGB ein rechter Winkel: so ist §. 65. $AB^2 = BG^2 + GA^2$.

§. 99.

Digitized by Google

§. 99.

Aufgabe: In jeden Cirkel einen Triangel, wozu die Winkel A, B, D, gegeben sind, zu beschreiben. Fig. 77.

Es sey §. 80. EF eine Tangente in G. Auch sey §. 35. FGH = ABD, und EGK = ADB. Ziehet man KH: so ist §. 94. HKG = FGH = ABD, und GHK = EGK = ADB, folglich §. 46. KGH = BAD.

§. 100.

Aufgabe: Um jeden Cirkel einen Triangel, wozu die Winkel A, B, D, gegeben sind, zu beschreiben. Fig. 78.

Man verlängere BD zu beyden Seiten, und ziehe vom Mittelpunkte C willkührlich die CG. Nun sey §. 35. GCH = ABE, und GCK = ADF. Legt man §. 80. in den Punkten G, H, K, Tangenten LM, MN, NL, so müssen §. 43. solche einander schneiden.

Da §. 47. Zus. in CGMH die Winkel zusammen 4 rechten Winkeln gleich sind; und §. 80. CHM + CGM = 2 R: so ist GCH + HMG = 2 R. Nun ist §. 22. ABD + ABE = 2 R. Folglich ist I. §. 45. GCH + HMG = ABD + ABE. Nun ist GCH = ABE. Folglich ist I. §. 46. HMG = ABD. Nun wird eben so bewiesen, daß GLK = ADB. Folglich ist auch §. 46. HNK = BAD.

§. 101.

Aufgabe: In jedem Triangel ABD einen Cirkel zu beschreiben. Fig. 79.

Es sey §. 18. DBA, und ADB, von BC und DC halbirt, welche §. 43. in C zusammentreffen; auch sey §. 21. CE, CF, CG, senkrecht: so ist CBE = CBF,

Digitized by Google

CEB = CFB, CB = CB, folglich §. 38. CE = CF. Nun beweiſt man eben ſo, daß CG = CF. Folglich iſt CE = CG = CF, folglich §. 74. C der Mittelpunkt eines Cirkels durch E, F, G, und §. 80. AB, BD, DA Tangenten.

§. 102.

Aufgabe: Um jeden Triangel ABD, einen Cirkel zu beſchreiben. Fig. 80.

Es ſey §. 19. AB, AD, in E, F, halbirt, und §. 20. EC, FC, ſenkrecht, welche §. 43. in C zuſammentreffen: ſo iſt §. 68. in EC und FC, folglich in C der Mittelpunkt des Cirkels durch A, B, D, und AB, BD, DA, Sehnen.

Zuſatz. Hieraus erhellet, wenn drey Punkte, A, B, D, die nicht in einer geraden Linie liegen, gegeben ſind; wie man durch ſolche einen Cirkel beſchreiben könne.

§. 103.

Aufgabe: In jedem Cirkel ein Quadrat zu beſchreiben. Fig. 81.

Durch den Mittelpunkt C ziehe man AB, DE ſenkrecht, und verbinde AE, EB, BD, DA: ſo ſind dieſe Linien §. 14. einander gleich, und die davon eingeſchloſſenen Winkel §. 93. rechte Winkel, folglich AEBD ein Quadrat.

§. 104.

Aufgabe: Um jeden Cirkel ein Quadrat zu beſchreiben. Fig. 82.

Durch den Mittelpunkt C ziehe man AB, DE ſenkrecht, und §. 80. in A, E, B, D, Tangenten, FK, KH, HG, GF, welche §. 43. zuſammentreffen: ſo ſind ſolche §. 41. den Durchmeſſern, AB, DE, parallel, und §. 49. gleich, folglich I. §. 45. einander ſelbſt gleich, und die davon

Digitized by Google

davon eingeschlossenen Winkel §. 49. den Winkeln bey C gleich, folglich rechte Winkel. Demnach ist FGHK ein Quadrat.

§. 105.

Aufgabe: In jedes Quadrat FGHK einen Cirkel zu beschreiben. Fig. 82.

Man halbire §. 19. GF, FK, in D, A, und ziehe §. 42. durch A und D, die AB und DE, den Seiten des Quadrats parallel: so ist, weil GF = FK, I. §. 47. DF = FA, folglich §. 49. CA = CD. Nun wird eben so bewiesen, daß CD = CB = CE = CA. Folglich gehet aus C, durch A, E, B, D, ein Cirkel, dessen Tangenten §. 80. die Seiten des Quadrats sind.

§. 106.

Aufgabe: Um ein gegebnes Quadrat AEBD einen Cirkel zu beschreiben. Fig. 81.

Man ziehe die Diagonalen AB, DE: so ist AD=DB; AE = EB; DE = DE; folglich §. 17. ADE = EDB = ½ R. Nun beweist man eben so, daß auch BAD = ½ R. Folglich ist ADE = BAD, folglich §. 16. CA = CD. Eben so beweist man, daß CD = CB = CE = CA. Folglich gehet aus C ein Cirkel durch A, E, B, D.

§. 107.

Aufgabe: In jedem Cirkel eine reguläre sechsseitige Figur zu beschreiben. Fig. 83.

Durch den Mittelpunkt C ziehe man AB, und aus B mit BC einen Cirkel. Man verbinde DB, BE, EC, CD; verlängere EC, DC, nach G und F; und ziehe EF, FA, AG, GD.

Da §. 11. Zus. 1. BC = CD, und DB = BC, folglich I. §. 45. CD = DB: so ist ΔCDB gleichseitig, folglich

Digitized by Google

lich §. 15. die Winkel gleich, und jeder §. 46. der dritte Theil von 2 rechten Winkeln. Aus gleichen Gründen gilt dies auch vom △CBE, folglich auch §. 22. vom △CEF, folglich §. 25. auch von den drey übrigen Triangeln. Demnach ist AGDBEF gleichseitig und gleichwinklicht.

Zusatz. Hieraus erhellet, daß die Seite jeder regulären sechsseitigen Figur dem Halbmesser des Cirkels, worinn sie beschrieben ist, gleich sey.

Anmerkung. Ziehet man Fig. 81. durch des Cirkels Mittelpunkt C, AB, DE senkrecht, verbindet AD, halbirt AC in F, und ziehet aus F mit FD den Bogen DG: so ist von den regulären Figuren, die man in den Cirkel beschreiben kann, DA die Seite des Quadrats; CG die Seite des regulären Dekagons; DG die Seite des regulären Pentagons; DC die Seite des regulären Hexagons; und Fig. 83. AE die Seite des regulären Triangels. Das Nähere vom Pentagon folgt §. 151.

§. 108.

Aufgabe: Um jeden Cirkel eine reguläre sechsseitige Figur zu beschreiben. Fig. 84.

Man beschreibe §. 107. in den Cirkel, dessen Mittelpunkt C, eine reguläre sechsseitige Figur ABDEFG, und ziehe in gedachten Punkten §. 80. Tangenten, die §. 43. zusammentreffen: so ist das verlangte geschehen.

Da §. 11. Zus. 1. CA = CB, folglich §. 15. CAB = CBA, und §. 24. CAK = CBK: so ist I. §. 46. KAB = KBA, folglich §. 16. AK = KB, folglich §. 17. AKC = CKB, und ACK = KCB. Demnach ist AKB sowohl als ACB von CK halbirt. Nun wird dies von allen übrigen Winkeln eben so bewiesen. Folglich ist KB = BL, KA = AH, folglich HK = KL u. s. w. und HKL = KLM u. s. w. Demnach ist HKLMNO gleichseitig und gleichwinklicht.

§. 109

Digitized by Google

§. 109.

Aufgabe: In jede reguläre sechsseitige Figur ABDEFG einen Cirkel zu beschreiben. Fig. 85.

Man halbire §. 18. die Winkel ABD, BDE, und ziehe CE, CF, CG, CA. Von C fälle man §. 21. Perpendikel auf die Seiten der gegebenen Figur: so sind diese alle einander gleich, und es gehet daher aus C ein Cirkel durch H, K, L, M, N, O. Denn da AB = BD, BC = BC, ABC = CBD: so ist §. 14. BAC = BDC. Folglich ist auch BAG und so alle übrige Winkel halbirt. Nun ist CHB = CKB, CBH = CBK, CB = CB. Folglich ist §. 38. CH = CK. Auf eben die Art beweist man auch, daß CK = CL = CM = CN = CO = CH.

§. 110.

Aufgabe: Um jede reguläre sechsseitige Figur ABDEFG, einen Cirkel zu beschreiben. Fig. 86.

Es sey §. 18. ABD, BDE, von BC, DC halbirt, welche §. 43. in C zusammentreffen. Ziehet man nun CE, CF, CG, CA: so ist auf eben die Art wie §. 109. erweislich, daß auch alle übrige Winkel so halbirt, und daher einander gleich sind. Folglich ist §. 16. CA = CB = CD = CE = CF = CG. Demnach gehet ein Cirkel aus C mit CA durch A, B, D, E, F, G.

VII. Aehnlichkeit geradlinichter Figuren.

§. 111.

Jede Größe, wenn man sie mit einer andern ihrer Art vergleicht, kann durch, rationale oder irrationale, Zahlen ausgedrückt werden.

Ist erstlich eine Größe das Vielfache einer andern: so kann erstere durch eine Zahl, deren Einheit die andre Größe ist, ausgedrückt werden.

So

Digitized by Google

So ist Fig. 87. die gerade Linie AB das Vierfache einer andern CD, und kann, wenn man die andre zur Einheit annimmt, durch die rationale ganze Zahl 4 ausgedrückt werden; weil AB = 4 . CD = 4 . 1 = 4.

Ist zweytens eine Größe das Vielfache eines bestimmten Theils der andern: so kann erstere durch eine Zahl, deren Einheit der bestimmte Theil der andern Größe ist, ausgedrückt werden.

So ist Fig. 88. die gerade Linie AB das dreyfache der CE, oder des vierten Theils einer andern CD, und kann, wenn man die andre zur Einheit annimmt, durch den rationalen Bruch $\frac{3}{4}$ ausgedrückt werden; weil AB = 3 . CE = 3 . $\frac{1}{4}$. CD = $\frac{3}{4}$. CD = $\frac{3}{4}$. 1 = $\frac{3}{4}$.

Ist drittens eine Größe weder das Vielfache einer andern, noch das Vielfache irgend eines bestimmten Theils der andern: so kann erstere durch keine Zahl, deren Einheit die andre Größe oder irgend ein bestimmter Theil derselben ist, das ist, durch keine rationale Zahl ausgedrückt werden. In diesem Falle ist irgend ein Vielfaches der andern Größe, oder jedes bestimmten Theils derselben kleiner, mit dem Einfachen vermehrt aber größer als die erstere; so daß der Unterschied jedesmal kleiner ist, als die andre Größe, und als der bestimmte Theil derselben; und daher durch Verminderung des bestimmten Theils so klein als man will gemacht werden kann, doch ohne daß er je ganz aufhörte. Demnach kann die erste Größe durch eine Zahl, deren Einheit der kleinste noch unbestimmte Theil der andern Größe ist, das ist, durch eine Irrationalzahl ausgedrückt werden.

So ist Fig. 89. die gerade Linie AB größer als das Zweyfache, und kleiner als das Dreyfache einer andern CD; oder, wenn man CD in drey gleiche Theile theilt, deren einer CF, größer als das Siebenfache, und kleiner

als

Digitized by Google

als das Achtfache der CF, so daß der Rest GB < CF ist. Bliebe nun, wenn man CF wiederum theilte, und den daher entstehenden Theil abermals theilte, und dies immer so fort, jedesmal die erstere Größe AB zwischen irgend einem Vielfachen eines solchen Theils, und diesem durch das Einfache vermehrten Vielfachen: so kann man die erstre Größe AB durch eine Zahl, welche das Vielfache eines solchen immer kleinern Theils der andern, die man zur Einheit annimmt, immer genauer und genauer anzeigt, das ist, durch eine Irrationalzahl von der Form 2, 3 ..... ausdrücken.

§. 112.

Größen, welche sich (auf die vorher beschriebene Art) durch rationale Zahlen ausdrücken lassen, heißen commensurabel, oder rational; die sich aber nur durch irrationale Zahlen ausdrücken lassen, incommensurabel oder irrational.

So sind AB, CD in Fig. 87. 88. commensurabel oder rational; hingegen in Fig. 89. incommensurabel oder irrational, wenn bey jeder Eintheilung der CD, ein Vielfaches des jedesmal daher entstehenden Theils die AB nicht erschöpft, sondern einen Rest läßt, der kleiner als ein solcher Theil ist.

§. 113.

Größen sind in einer Verhältniß, in so fern die eine ein Vielfaches eines bestimmten oder unbestimmten Theils der andern ist. Eine Zahl, welche solches Vielfache anzeigt, heißt der Verhältnißname; daher die Verhältniß nach Beschaffenheit des Verhältnißnamens rational oder irrational ist. Zwey Größen sind zwey andern Größen proportionirt, wenn der Verhältnißname beyder Paare einerley ist, er mag nun

Digitized by Google

nun rational oder irrational seyn. Zwey Größen sind zwey andern **umgekehrt proportionirt**, wenn das eine Paar die äußern, und das andre Paar die mittlern Glieder der Proportion giebt.

So sind vier gerade Linien, A, B, C, D, proportionirt entweder wenn Fig. 90. D in C so vielmal enthalten ist, als B in A; oder wenn Fig. 91. B und D in eine gleiche Anzahl gleicher Theile getheilt ist, und ein solcher Theil von D in C so vielmal enthalten ist, als ein solcher von B in A; oder wenn Fig. 92. bey jeder solcher Theilung der B und D, ein Theil von D in C immer so vielmal mit einem kleinern Reste enthalten ist, als ein Theil von B in A mit einem kleinern Reste.

§. 114.

Geradlinichte Figuren sind **ähnlich**, wenn die eine mit der andern einerley Winkel hat, und die Seiten, welche einerley Winkel einschließen, einerley Verhältniß haben; oder kürzer: wenn ihre Winkel gleich, und ihre gleichliegenden Seiten proportionirt sind. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist (∾).

Zusatz. In zwey geradlinichten Figuren sind die Seiten **umgekehrt proportionirt**, wenn zwey Seiten der einen die äußern und zwey gleichliegende Seiten der andern die mittlern Glieder der Proportion geben. (§. 113.)

§. 115.

Triangel ABC, ACD, wie auch Parallelogramme EC, CF, von einerley Höhe, verhalten sich wie ihre Grundlinien BC, CD. Fig. 93. 94.

Erstlich sind BC, CD, commensurabel Fig. 93. so ist ein bestimmter Theil von BC, als BG, etlichemal in CD enthalten. Es sey daher BC = 2 BG und CD = 3 BG. Ziehet man nun von A nach jeden Theilpunkt der

Digitized by Google

der BC, CD, gerade Linien: so sind §. 56. die Triangel alle einander gleich, und △ABC = 2 △ABG, auch △ACD = 3 △ABG. Folglich ist §. 113. △ABC : △ACD = BC : CD.

Da §. 59. EC = 2 △ABC, und CF = 2 △ACD: so ist II. §. 79. EC : CF = △ABC : △ACD. Nun war △ABC : △ACD = BC : CD. Folglich ist II. §. 73. EC : CF = BC : CD.

Zweytens sind BC, CD, incommensurabel Fig. 94. so ist jeder bestimmte Theil von BC, als BG, etlichemal in CD mit einem kleinern Reste enthalten. Es sey daher BC = 2 BG und CD = 3 BG + HD. Ziehet man nun von A gerade Linien nach jedem Theilpunkte: so sind §. 56. die Triangel alle einander gleich, und △ABC = 2 △ABG, auch △ACD = 3 △ABG + △AHD. Folglich ist §. 113. △ABC : △ACD = BC : CD.

Aus eben den Gründen, wie zuvor, ist auch hier EC : CF = △ABC : △ACD = BC : CD.

§. 116.

Ist in einem Triangel ABC, eine gerade Linie DE, der einen Seite BC, parallel: so schneidet sie die beyden andern Seiten AB, AC, proportionirt. Und schneidet eine gerade Linie DE, zwey Seiten eines Triangels, AB, AC, proportionirt: so ist sie der dritten Seite BC, parallel. Fig. 95.

Es sey erstlich DE, BC, parallel, und BE, CD gezogen: so ist §. 55. △BDE = △CDE, folglich II. §. 74. △BDE : △ADE = △CDE : △ADE. Nun ist §. 115. △BDE : △ADE = BD : DA, und △CDE : △ADE = CE : EA. Folglich ist II. §. 73. BD : DA = CE : EA.

Es sey zweytens BD : DA = CE : EA. Nun ist §. 115. BD : DA = △BDE : △ADE, und CE : EA = △CDE

Digitized by Google

△CDE : △ADE. Folglich ist II. §. 73. △BDE : △ADE = △CDE : △ADE, folglich II. §. 75. △BDE = △ADE, folglich §. 57. DE, CB parallel.

Zusatz. 1. Durch die Abänderung II. §. 79. ist auch AD : DB = AE : EC, und BA : DA = CA : EA; auch AD : AE = DB : EC, und BA : CA = DA : EA.

2. Außerdem ist auch AB : BC = AD : DE. Denn ziehet man der AC die DF parallel, so ist nach Obigen BA : AD = BC : CF. Nun ist §. 49. CF = ED. Folglich ist BA : AD = BC : ED, folglich II. §. 79. AB : BC = AD : DE.

§. 117.

Eine gerade Linie AD, von der Spitze A eines Triangels ABC, an die Grundlinie BC, schneidet solche den Schenkeln BA, AC, proportionirt, wenn sie den entgegengesetzten Winkel BAC, halbirt; und halbirt solchen Winkel, wenn sie die Grundlinie den Schenkeln proportionirt schneidet. Fig. 96.

Es sey zuerst BAD = DAC; BA verlängert; und §. 42. CE der AD parallel: so ist §. 44. BAD = BEC, und DAC = ACE; folglich I. §. 45. BEC = ACE; folglich §. 15. EA = AC. Nun ist §. 116. BD : DC = BA : AE. Folglich ist BD : DC = BA : AC.

Es sey zweytens BD : DC = BA : AC; und CE, AD parallel: so ist §. 116. BD : DC = BA : AE; folglich II. §. 73. BA : AC = BA : AE; folglich II. §. 75. AC = AE; folglich §. 15. BEC = ACE. Nun ist §. 44. BEC = BAD und ACE = DAC. Folglich ist I. §. 45. BAD = DAC.

§. 118.

Sind in zwey Triangeln ABC, DCF, die Winkel des einen den Winkeln des andern gleich: so sind die Seiten,

Digitized by Google

Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, proportionirt, und zwar die, welche gleichen Winkeln entgegengesetzt sind, gleichnamig. Fig. 97.

Man bringe die Triangel so an einander, daß die gleichen Winkel einerley Lage haben, und BC, CE, in gerader Linie sind; und verlängere BA, ED, welche §. 43. in F zusammentreffen, weil §. 28. ABC + ACB < 2 R. und angenommen ist, daß ACB = DEC.

Da ABC = DCE, und ACB = DEC: so ist §. 41. DC der BF, und AC der EF parallel; folglich CF ein Parallelogramm, folglich §. 49. AC = DF, und FA = CD.

Da AC der EF parallel: so ist §. 116. BA : AF = BC : CE, oder, weil AF = DC, AB : DC = BC : CE, folglich AB : BC = DC : CE.

Da DC der BF parallel: so ist §. 116. BC : CE = FD : DE, oder, weil FD = CA, BC : CE = CA : ED, folglich BC : CA = CE : ED.

Da AB : DC = BC : CE, und BC : CE = CA : ED: so ist II. §. 73. AB : DC = CA : ED; folglich BA : AC = CD : DE.

§. 119.

Sind in zwey Triangeln ABC, DEF die Seiten des einen den Seiten des andern proportionirt: so sind die Winkel, welche gleichnamigen Seiten entgegengesetzt sind, einander gleich. Fig. 98.

Es sey §. 35. FEG = ABC, und EFG = BCA; folglich §. 46. EGF = BAC. Folglich ist §. 118. AB : BC = GE : EF. Nun ist angenommen AB : BC = DE : EF. Folglich ist GE : EF = DE : EF; folglich GE = DE. Auf eben die Art beweist man, daß GF = DF. Nun ist auch EF = EF. Folglich ist §. 17. DEF = GEF = ABC; DFE = GFE = ACB; EDF = EGF = BAC.

Digitized by Google

§. 120.

Ist in zwey Triangeln ABC, DEF, ein Winkel BAC, des einen, einem Winkel EDF, des andern gleich, und die solche Winkel einschließenden Seiten proportionirt: so sind die Winkel, welche gleichnamigen Seiten entgegengesetzt sind, einander gleich. Fig. 99.

Es sey §. 35. FDG = BAC = EDF, und DFG = ACB; folglich §. 46. DGF = ABC. Folglich ist §. 118. BA : AC = GD : DF. Nun ist angenommen, BA : AC = ED : DF. Folglich ist GD : DF = ED : DF; folglich GD = ED. Nun ist auch DF = DF, und GDF = EDF. Folglich ist §. 14. DFE = DFG = ACB und DEF = DGF = ABC.

§. 121.

Sind in zwey Triangeln ABC, DEF, zwey Seiten des einen AB, BC, zweyen Seiten des andern DE, EF proportionirt, und die Winkel BAC, EDF, welche zwey gleichnamigen Seiten entgegengesetzt sind, einander gleich, ferner die Winkel ACB, DFE, welche den beyden andern gleichnamigen Seiten entgegengesetzt sind, zugleich spitz, oder zugleich nicht spitz: so sind die Winkel ABC, DEF, welche von den proportionirten Seiten eingeschlossen werden, einander gleich. Fig. 100.

Gesetzt diese Winkel wären ungleich, so daß der eine, etwa ABC > DEF wäre: so sey ABG = DEF. Nun ist angenommen BAC = EDF; Folglich wäre §. 46. AGB = DFE; folglich §. 118. AB : BG = DE : EF. Nun ist angenommen AB : BC = DE : EF. Folglich wäre AB : BG = AB : BC; folglich BG = BC, folglich §. 15. ACB = BGC.

Ist

Ist nun ACB ein spitzer Winkel: so ist §. 22. AGB = DFE, ein stumpfer Winkel, da doch angenommen, daß DFE auch zugleich spitz ist. Ist ACB nicht spitz: so ist BGC = ACB auch nicht spitz, welches §. 28. unmöglich ist.

§. 122.

Jeden rechtwinklichten Triangel ABC, theilt ein Perpendikel AD, von der Spitze des rechten Winkels A, auf die Hypothenuse BC, in zwey dem Ganzen und einander selbst ähnliche Triangel ABD, ADC. Fig. 101.

Da §. 24. ADB = BAC; auch ABD = ABC; folglich §. 46. BAD = BCA: so sind §. 118. die Seiten proportionirt, und §. 114. △ABD ∾ △ABC. Eben so wird bewiesen, daß △ADC ∾ △ABC.

Da §. 24. ADB = ADC, und nach Obigen BAD = BCA; folglich §. 46. ABD = DAC: so sind §. 118. die Seiten proportionirt, und §. 114. △ABD ∾ △ADC.

Zusatz. 1. Daher ist solcher Perpendikel AD die mittlere Proportionallinie zu den Abschnitten der Hypothenuse BD, DC; weil §. 118. BD : AD = AD : DC. Auch ist zur Hypothenuse BC, und jedem ihrer Abschnitte BD, DC, der an solchem Abschnitte liegende Kathete AB, AC, die mittlere Proportionallinie; weil §. 118. BC : AB = AB : BD, und BC : AC = AC : CD.

2. Zwey geradlinichte Figuren, welche einer dritten ähnlich, sind selbst ähnlich.

§. 123.

Aufgabe: Von einer geraden Linie AB, einen bestimmten Theil abzuschneiden. Fig. 102.

Legt man an BA die AC unter beliebigen Winkel BAC, trägt auf AC so viel gleiche Theile AD, DE, EC, als ver-

Digitized by Google

langt wird, ziehet CB, und macht §. 42. DF der CB parallel: so ist §. 116. AD : AC = AF : AB. Nun ist AD = $\frac{1}{3}$ AC. Folglich ist AF = $\frac{1}{3}$ AB.

§. 124.

Aufgabe: Eine ungetheilte gerade Linie AB, einer getheilten AC, proportionirt zu schneiden. Fig. 103.

Legt man AC, welche beliebig in D und E getheilt ist, unter beliebigen Winkel an BA, ziehet CB, und macht §. 42. DF, EG, der CB, und DK der AB parallel: so sind FH, HB, Parallelogramme, folglich §. 49. DH = FG, und HK = GB. Nun ist §. 116. AD : DE = AF : GF und DE : EC = DH : HK = FG : GB.

§. 125.

Aufgabe: Zu zwey geraden Linien, AB, AC, die dritte Proportionallinie zu finden. Fig. 104.

Legt man BA, AC, unter beliebigen Winkel an einander, verlängert sie nach D und E, macht BD = AC, ziehet BC, und §. 42. DE der BC parallel: so ist §. 116. AB : BD = AC : CE, worinn BD = AC.

§. 126.

Aufgabe: Zu drey geraden Linien, A, B, C, die vierte Proportionallinie zu finden. Fig. 105.

Es sey willkührlich ein Winkel EDF. Macht man DG = A; GE = B; DH = C; ziehet GH, und §. 42. EF der GH parallel: so ist §. 116. DG : GE = DH : HF, oder A : B = C : HF.

§. 127.

Aufgabe: Zu zwey geraden Linien, AB, BC, die mittlere Proportionallinie zu finden. Fig. 106.

Man

Digitized by Google

Man lege AB, BC in einer geraden Linie an einander, halbire AC, und beschreibe den halben Cirkel ADC. Auf AC errichte man §. 20. in B den Perpendikel BD, und ziehe DA, DC: so ist §. 93. ADC ein rechter Winkel; folglich §. 122. AB : BD = BD : BC.

§. 128.

Ist in zwey gleichen Parallelogrammen, AB, BC, ein Winkel des einen, FBD, einem Winkel des andern, EBG, gleich: so sind die solche Winkel einschliessenden Seiten umgekehrt proportionirt. Auch sind zwey Parallelogramme, AB, BC, einander gleich, wenn ein Winkel des einen, FBD, einem Winkel des andern, EBG, gleich ist, und die solche Winkel einschließenden Seiten umgekehrt proportionirt sind. Fig. 107.

Es sey zuerst AB = BC. Bringt man DB, BE in eine gerade Linie: so sind §. 26. auch FB, BG, in einer geraden Linie. Vollendet man nun das Parallelogramm FE: so ist II. 74. AB : FE = BC : FE. Nun ist §. 115. AB : FE = DB : BE, und BC : FE = GB : BF. Folglich ist II. §. 73. DB : BE = GB : BF.

Es sey zweytens DB : BE = GB : BF. Nun ist §. 115. DB : BE = AB : FE, und GB : BF = BC : FE. Folglich ist II. §. 73. AB : FE = BC : FE. Folglich ist II. §. 75. AB = BC.

§. 129.

Ist in zwey gleichen Triangeln ABC, ADE, ein Winkel des einen, BAC, einem Winkel des andern, DAE, gleich: so sind die solche Winkel einschließenden Seiten umgekehrt proportionirt. Auch sind zwey Triangel ABC, ADE, einander gleich, wenn ein Winkel des einen, BAC, einem Winkel des andern,

DAE, gleich ist, und die solche Winkel einschließenden Seiten umgekehrt proportionirt sind. Fig. 108.

Es sey zuerst △ABC = △ADE. Bringt man CA, AD, in eine gerade Linie: so sind §. 26. auch EA, AB, in einer geraden Linie. Ziehet man nun BD: so ist II. §. 74. △ABC : △BAD = △ADE : △BAD. Nun ist §. 115. △ABC : △BAD = CA : AD, und △ADE : △BAD = EA : AB. Folglich ist II. §. 73. CA : AD = EA : AB.

Es sey zweytens CA : AD = EA : AB. Nun ist §. 115. CA : AD = △ABC : △BAD, und EA : AB = △ADE : △BAD. Folglich ist II. §. 73. △ABC : △BAD = △ADE : △BAD; folglich II. §. 75. △ABC = △ADE.

§. 130.

Sind vier gerade Linien AB, CD, E, F, proportionirt: so ist das Rectangel der äußern Glieder, AB, F, dem Rectangel der mittlern Glieder CD, E, gleich. Auch sind vier gerade Linien AB, CD, E, F, proportionirt, wenn das Rectangel der ersten und letzten AB, F, dem Rectangel der beyden mittlern, CD, E, gleich ist. Fig. 109.

Es sey zuerst AB : CD = E : F. Man errichte §. 20. auf BA, DC, die Perpendikel AG = F, und CH = E, und vollende §. 51. die Parallelogramme BG, DH: so ist §. 128. BG = DH.

Es sey zweytens BG = DH: so ist §. 128. AB : CD = CH : AG = E : F.

§. 131.

Sind drey gerade Linien A, B, C, proportionirt: so ist das Rectangel der äußern Glieder A, C, dem Quadrat des mittelsten Gliedes B gleich. Auch sind drey

drey gerade Linien A, B, C, proportionirt, wenn das Rectangel der ersten und dritten, A, C, dem Quadrate der zweyten B gleich ist. Fig. 110.

Es sey zuerst A : B = B : C. Nun sey D = B, also A : B = D : C. Folglich ist §. 130. AC = BD = B².

Es sey zweytens AC = B² = BD: so ist §. 130. A : B = D : C, und daher A : B = B : C.

Zusatz. Ein Rectangel wird demnach in ein Quadrat verwandelt, wenn man §. 127. zu den beyden Seiten des Rectangels, A, C, die mittlere Proportionallinie B, sucht.

§. 132.

Aufgabe: Auf einer geraden Linie AB, eine geradlinichte Figur zu beschreiben, welche einer gegebenen geradlinichten Figur CE, ähnlich sey. Fig. 111.

Macht man §. 35. BAG = DCF; ABG = CDF; BGH = DFE; GBH = FDE: so ist auch §. 46. AGB = CFD, und GHB = FED; auch §. 118. die Seiten proportionirt. Folglich ist §. 114. AH ∾ CE.

§. 133.

Aehnliche Triangel ABC, DEF, verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten. Fig. 112.

Es sey §. 125. BC : EF = EF : BG, folglich II. §. 85. BC : BG = BC² : EF². Man ziehe AG. Da △ABC ∾ △DEF: so ist §. 114. ABC = DEF, und AB : BC = DE : EF, folglich AB : DE = BC : EF. Nun war BC : EF = EF : BG. Folglich ist AB : DE = EF : BG, folglich §. 129. △ABG = △DEF, folglich II. §. 74. △ABC : △ABG = △ABC : △DEF. Nun ist §. 115. △ABC : △ABG = BC : BG. Folglich ist auch △ABC : △DEF = BC : BG. Nun war BC : BG = BC² : EF². Folglich ist △ABC : △DEF = BC² : EF².

Digitized by Google

Zusatz. Hieraus erhellet, wenn drey gerade Linien BC, EF, BG, proportionirt sind; daß alsdenn der Triangel auf der ersten ABC, zu dem ihm ähnlichen Triangel auf der zweyten DEF, sich verhalte, wie die erste BC, zur dritten BG.

§. 134.

Aehnliche Polygone ABCDE, FGHKL, lassen sich in gleich viele ähnliche den Polygonen proportionirte Triangel theilen.

Man ziehe die Diagonalen BE, EC; GL, LH. Da die Polygone ähnlich: so ist §. 114. BAE = GFL und BA : AE = GF : FL, folglich §. 120. ABE = FGL, und AEB = FLG, folglich §. 118. AB : BE = FG : GL, und AE : EB = FL : LG. Folglich ist §. 114. △ABE ~ △FGL. Ein gleiches wird von den Triangeln EDC, LKH, bewiesen. Folglich ist auch §. 118. 119. △BEC ~ △GLH.

Da △ABE ~ △FGL: so ist §. 133. △ABE : △FGL = BE² : GL². Aus eben dem Grunde ist auch △EBC : △LGH = BE² : GL². Folglich ist △ABE : △FGL = △EBC : △LGH = △CDE : △HKL. Folglich ist II. §. 86. △CDE : FGHKL = △ABE : △FGL.

Zusatz. Gerad[illegible] Figuren, welche aus ähnlichen Triangeln in gehöri[illegible]nung zusammengesetzt sind, sind einander ähnlich.

Die Perimeter ähnlicher Polygone ABCDE, FGHKL, verhalten sich wie die gleichliegenden Seiten, oder Diagonalen. Fig. 113.

Da die Polygone ähnlich sind, so ist §. 114. AB : FG = BC : GH = CD : HK = DE : KL = EA : LF. Folglich ist II. §. 86. (AB + BC + CD + DE + EA) : (FG

(FG + GH + HK + KL + LF) = AB : FG ꝛc. = BE : GL ꝛc. (§. 134.)

Zusatz. Da sich dieses auch von den vierseitigen Figuren und von den Triangeln beweisen läßt: so gilt der Satz von allen geradlinichten Figuren.

§. 136.

Aehnliche Polygone ABCDE, FGHKL, verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten oder Diagonalen. Fig. 113.

Da §. 134. ABCDE : FGHKL = △ABE : △FGL und §. 133. △ABE : △FGL = AB^q : FG^q = BE^q : GL^q: so ist auch ABCDE : FGHKL = AB^q : FG^q = BE^q : GL^q ꝛc.

Zusatz. 1. Da dies auch von vierseitigen Figuren erweislich ist, und von Triangeln §. 133. bewiesen worden: so gilt der Satz von allen geradlinichten Figuren.

2. Hieraus erhellet, wenn drey gerade Linien, AB, FG, O, proportionirt sind; daß alsdann die geradlinichte Figur auf der ersten ABCDE, sich zu der ihr ähnlichen auf der zweyten FGHKL, verhalte, wie die erste AB zur dritten O.

§. 137.

Aufgabe: Eine geradlinichte Figur zu beschreiben, welche einer gegebnen ABC, ähnlich, und einer andern D, gleich sey. Fig. 114.

Man beschreibe §. 63. auf BC das Parallelogramm BE = △ABC und §. 64. auf CE, unter dem Winkel CBL, das Parallelogramm CM = D: so ist §. 23. BC mit CF, und LE mit EM in einer geraden Linie. Ferner mache man §. 127. BC : GH = GH : CF, und beschreibe §. 132. auf GH den △KGH ∼ △ABC.

Da

Digitized by Google

Da BC : GH = GH : CF: so ist §. 136. Zus. 2. △ABC : △KGH = BC : CF. Nun ist §. 115. BE : CM = BC : CF. Folglich ist △ABC : △KGH = BE : CM, folglich △ABC : BE = △KGH : CM. Nun ist △ABC = BE. Folglich ist auch △KGH = CM = D.

§. 138.

Sind vier gerade Linien AB, CD, EF, GH, proportionirt: so sind auch die auf denselben beschriebnen ähnlichen geradlinichten Figuren KAB, LCD, MF, NH, proportionirt. Auch sind vier gerade Linien AB, CD, EF, GH, proportionirt, wenn die auf denselben beschriebenen ähnlichen Figuren KAB, LCD, MF, NH, proportionirt sind. Fig. 115.

Es sey zuerst AB : CD = EF : GH. Nun sey §. 125. AB : CD = CD : O, und EF : GH = GH : P. Folglich ist II. §. 73. CD : O = GH : P. Nun war AB : CD = EF : GH. Folglich ist II. §. 81. AB : O = EF : P. Nun ist §. 136. Zus. 2. AB : O = △KAB : △LCD, und EF : P = MF : NH. Folglich ist II. §. 73. △KAB : △LCD = MF : NH.

Es sey zweytens △KAB : △LCD = MF : NH. Nun ist §. 136. Zus. 2. △KAB : △LCD = AB^q : CD^q, und MF : NH = EF^q : GH^q. Folglich ist II. §. 73. AB^q : CD^q = EF^q : GH^q; folglich II. §. 79. AB : CD = EF : GH.

§. 139.

In jedem rechtwinklichten Triangel ABC, ist die Figur auf der Hypothenuse BC, den ihr ähnlichen Figuren auf den Katheten BA, AC, zusammen gleich. Fig. 116.

Es sey AD senkrecht, so ist §. 122. Zus. 1. CB : BA = BA : BD, folglich §. 136. Zus. 2. E : F = CB : BD. Eben so ist erweislich E : G = CB : CD. Folglich ist

II.

Digitized by Google

II. §. 86. E : (F + G) = CB : (BD + DC). Da nun CB = BD + DC: so ist auch E = F + G.

§. 140.

Zwey rechtwinklichte Parallelogramme AC, CF, sind in zusammengesetzter Verhältniß ihrer Grundlinien BC, CG, und Höhen CD, CE. Fig. 117.

Bringt man BC, CG in eine gerade Linie: so ist §. 26. DC mit CE auch in gerader Linie. Man vollende das Rectangel CH. Nun sey willkürlich eine gerade Linie K, und §. 126. BC : CG = K : L, auch DC : CE = L : M, so ist II. §. 84. K : M = K . L : L . M = BC . DC : CG . CE. Nun ist §. 115. AC : CH = BC : CG = K : L, und CH : CF = CD : CE = L : M, und daher II. §. 81. AC : CF = K : M. Folglich ist auch AC : CF = BC . DC : CG . CE.

Zusatz. Da §. 54. jedes schiefwinklichte Parallelogramm einem rechtwinklichten AC, bey gleicher Grundlinie BC, und Höhe CD, gleich ist: so gilt der Satz von allen Parallelogrammen; und, weil §. 49. ein ΔDBC die Hälfte des Parallelogramms AC, auch von allen Triangeln.

VIII. Proportionen beym Cirkel.

§. 141.

In gleichen Cirkeln sind die Winkel und Ausschnitte, ACB, EDF, den abgeschnittenen Bogen AB, EF, proportionirt. Fig. 118.

Sind AB, EF, commensurabel: so ist ein bestimmter Theil von EF, als EG, etlichemal ohne Rest in AB enthalten. Es sey daher EF = 3 . EG, und AB = 5 . EG. Verbindet man nun die Mittelpunkte der Cirkel mit den Theilpunkten der Bogen mittelst gerader Linien: so sind

§. 90.

Digitized by Google

§. 90. die daher entstehenden Winkel und Ausschnitte einander gleich, und EDF = 3 . EDG, auch ACB = 15 . EDG. Folglich ist §. 113. ACB : EDF = AB : EF.

Sind AB, EF, incommensurabel: so ist bey jeder Eintheilung von EF, ein Theil EG in AB etlichemal mit einem kleinern Reste enthalten, und EDG in ACB eben so vielmal mit einem kleinern Reste. Folglich ist auch hier §. 113. ACB : EDF = AB : EF.

Zusatz. 1. Hieraus erhellet, daß die Ausschnitte ACB, EDF, sich auch wie die genannten Winkel verhalten.

2. Da die Peripheriewinkel, welche auf den Bogen AB, EF, stehen die Hälften der Centriwinkel ACB, EDF, sind: so verhalten sich auch die Peripheriewinkel in gleichen Cirkeln, wie die Bogen, auf denen sie stehen.

§. 142.

Sind in ungleichen Cirkeln die Winkel ACB, DEF, einander gleich: so sind ihre Bogen AB, DF, den Peripherien der Cirkel proportionirt. Auch sind die Winkel ACB, DEF einander gleich, wenn ihre Bogen AB, DF, den Peripherien der Cirkel proportionirt sind. Fig. 119.

Es sey zuerst ACB = DEF. Errichtet man §. 20. auf AC, DE, die Perpendikel CG, EH: so ist von den Bogen AG, DH, jeder der vierte Theil der Peripherie seines Cirkels. Nun ist §. 141. ACB : ACG = AB : AG, und DEF : DEH = DF : DH, und II. §. 74. ACB : ACG = DEF : DEH. Folglich ist II. §. 73. AB : AG = DF : DH, folglich AB : DF = AG : DH = 4 . AG : 4 DH. (II. §. 79.)

Es sey zweytens AB : DF = 4 AG : 4 DH = AG : DH, folglich AB : AG = DF : DH. Nun ist §. 141.

§. 141. AB : AG = ACB : ACG, und DF : DH = DEF : DEH. Folglich ist II. §. 73. ACB : ACG = DEF : DEH. Nun ist §. 24. ACG = DEH. Folglich ist II. §. 76. ACB = DEF.

§. 143.

Die Perimeter ähnlicher Polygone verhalten sich wie die Halbmesser oder Durchmesser der um oder in die Polygone beschriebenen Cirkel. Fig. 120.

Man betrachte zuerst die Polygone ABCDE, FGHKL, um welche die Cirkel, deren Durchmesser BM, GN, beschrieben sind, und ziehe AM, BE, FN, GL. Da §. 114. BAE = GFL, und BA : AE = GF : FL; so ist §. 120. AEB = FLG. Nun ist §. 86. AEB = AMB, und FLG = FNG. Folglich ist I. §. 45. AMB = FNG. Nun ist §. 93. BAM = GFN. Folglich ist §. 118. AB : FG = BM : GN = BR : GS. Nun ist §. 135. ABCDE : FGHKL = AB : FG. Folglich ist ABCDE : FGHKL = BM : GN = BR : GS.

Man betrachte zweytens die Polygone abcde, fghkl, in welche die Cirkel, deren Durchmesser BM, GN, beschrieben sind; und ziehe aR, fS: so siehet man leicht, daß ΔaBR ∾ ΔfGS, und aB : fG = BR : GS = BM : GN, und daß daher abcde : fghkl = BR : GS = BM : GN.

§. 144.

Aehnliche Polygone, verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser oder Durchmesser der um oder in die Polygone beschriebenen Cirkel. Fig. 120.

Da §. 143. bewiesen worden, daß AB : FG = BM : GN = BR : GS, folglich II. §. 79. AB^q : FG^q = BM^q : GN^q = BR^q : GS^q; und §. 136. ABCDE : FGHKL = AB^q : FG^q; so ist ABCDE : FGHKL = BM^q : GN^q = BR^q : GS^q.

Auf

Digitized by Google

Auf eben die Art wird ein gleiches von abcde, fghkl, bewiesen.

§. 145.

Ist ein reguläres Polygon abcde, um einen Cirkel, und ein ähnliches Polygon ABCDE, in demselben Cirkel beschrieben: so verhalten sich diese Polygone wie die Quadrate der vom Mittelpunkte R, auf die Polygonseiten ab, AB, gefällten Perpendikel RB, RP; ihre Perimeter aber, wie diese Perpendikel. Fig. 120.

Da leicht erweislich $\Delta RBa \sim \Delta RPB$: so ist $aB : BR = BP : PR$. Nun ist leicht erweislich $ab = 2aB$, und $AB = 2BP$. Folglich ist auch $ab : BR = AB : PR$, folglich $ab : AB = BR : PR$. Nun verhalten sich §. 136. die Polygone, wie $ab^q : AB^q$, und §. 135. ihre Perimeter, wie $ab : AB$. Folglich verhalten sich die Polygone auch wie $RB^q : RP^q$, und ihre Perimeter wie $RB : RP$.

§. 146.

Wenn in einem Cirkel zwey Sehnen BC, DE, einander schneiden: so sind die Abschnitte der einen, BA, AC, den Abschnitten der andern, DA, AE, umgekehrt proportionirt. Fig. 121.

Ziehet man BE, CD: so ist §. 86. $BED = BCD$; und $EBC = EDC$; auch §. 25. $BAE = DAC$. Folglich ist §. 118. $BA : DA = AE : AC$.

Zusatz. Schneidet Fig. 121. * der Durchmesser DE eine Sehne BC senkrecht: so ist §. 69. $AB = AC$; folglich die Proportion $AE : AC = AB : AD$ nunmehr $AE : AB = AB : AD$, das ist, der Perpendikel auf dem Durchmesser eines Cirkels ist die mittlere Proportionallinie zu den Abschnitten des Durchmessers.

§. 147.

Digitized by Google

§. 147.

Sind von einem Punkte A außerhalb eines Cirkels zwey gerade Linien AC, AE, gezogen, welche den Cirkel schneiden: so ist die eine AC, nebst ihrem äussern Abschnitte AB, der andern AE, nebst ihrem äussern Abschnitte, AD, umgekehrt proportionirt. Fig. 122.

Ziehet man BE, CD: so ist CAE = CAE, und §. 86. ACD = AEB, und daher §. 46. ADC = ABE. Folglich ist §. 118. AC : AE = AD : AB.

§. 148.

Sind von einem Punkte A außerhalb eines Cirkels zwey gerade Linien AC, AD, gezogen, deren eine AC den Cirkel schneidet, die andre AD ihn berühret; so ist die berührende AD, die mittlere Proportionallinie zu der schneidenden AC, und ihrem äußern Abschnitte AB. Auch ist von zwey geraden Linien AC, AD, die von obgedachten Punkte A nach dem Cirkel gehen, und deren eine AC, den Cirkel schneidet, die andre AD eine Berührungslinie, wenn sie die mittlere Proportionallinie zu der schneidenden AC, und ihrem äussern Abschnitte AB, ist. Fig. 123.

Es sey zuerst AD eine Tangente des Cirkels. Man ziehe BD, CD; so ist CAD = CAD, und §. 94. ADB = ACD, und daher §. 46. ABD = ADC. Folglich ist §. 118. AC : AD = AD : AB.

Es sey zweytens AC : AD = AD : AB. Von A ziehe man §. 81. die Tangente AE. Von des Cirkels Mittelpunkt F ziehe man FE, FA, FD: so ist nach Obigen AC : AE = AE : AB, und nach der Voraussetzung AC : AD = AD : AB. Folglich ist AD = AE. Nun ist auch FD = FE, und FA = FA. Folglich ist §. 17. ADF = AEF = R, folglich §. 80. AD eine Tangente.

Digitized by Google

§. 149.

Aufgabe: Eine gerade Linie AB, so zu schneiden, daß der größere Abschnitt die mittlere Proportionallinie zu der ganzen Linie und dem kleinern Abschnitte werde. Fig. 124.

Man halbire AB in G, errichte in B den Perpendikel BC = AG, mache aus C mit CB einen Cirkel, ziehe AC, und verlängre sie bis D: so ist DE = 2 . CB = AB. Endlich mache man aus A mit AE den Bogen EF, daß AF = AE: so ist AB in F so geschnitten, daß AB : AF = AF : FB.

Da AB senkrecht auf CB, folglich §. 80. eine Tangente des Cirkels ist: so ist §. 148. AE : AB = AB : AD, folglich II. §. 79. AE : AB − AE = AB : AD − AB. Nun ist AE = AF, und AB = DE. Folglich ist AF : AB − AF = AB : AD − DE, das ist, AF : FB = AB : AF, oder AB : AF = AF : FB.

§. 150.

Aufgabe: Einen gleichschenklichten Triangel zu beschreiben, worinn jeder Winkel an der Grundlinie doppelt so groß, als der Winkel an der Spitze sey. Fig. 125.

Es sey §. 149. eine gerade Linie AB in C so geschnitten, daß BA : AC = AC : CB. Aus A mache man mit AB einen Cirkel, trage §. 98. in denselben BD = AC, und ziehe DA: so ist △ABD nicht nur gleichschenklicht, weil AB = AD, sondern auch ABD = 2 BAD, wie bewiesen werden soll.

Man ziehe DC, und beschreibe §. 102. um den △ACD einen Cirkel. Da BA : AC = AC : CB, und BD = AC: so ist AB : BD = BD : CB, folglich §. 148. BD eine Tangente des Cirkels, folglich §. 94. BAD = CDB,

Digitized by Google

CDB, folglich I. §. 46. BAD + CDA = ADB. Nun ist §. 27. BAD + CDA = BCD, und §. 15. ADB = ABD. Folglich ist I. §. 45. BCD = ABD, folglich §. 16. BD = DC. Nun war BD = CA. Folglich ist DC = CA, folglich §. 15. 27. BCD = 2 BAD. Nun war BCD = ABD = ADB. Folglich ist auch 2 BAD = ABD = ADB.

§. 151.

Aufgabe. In jeden Cirkel eine reguläre fünfseitige Figur zu beschreiben. Fig. 126.

Es sey der ΔFGH wie §. 150. Man beschreibe §. 99. in den Cirkel den ΔACD mit solchen Winkeln, so daß also jeder Winkel an der Grundlinie CD doppelt so groß, als der Winkel an der Spitze A sey. Man halbire §. 18. jeden Wi[illegible]n der Grundlinie CD: so ist CAD = ACE = ECD = ADB = BDC, folglich §. 90. die Bogen dieser Winkel, folglich §. 91. die Sehnen dieser Bogen gleich. Demnach ist ABCDE gleichseitig. Da der Bogen AB dem Bogen DE gleich ist: so ist I. §. 46. ABCD = BCDE, folglich §. 90. AED = BAE. Eben so erweist man dies von den übrigen Winkeln. Demnach ist ABCDE auch gleichwinklicht.

Zusatz. Eben so wie §. 108. 109. 110. bey der regulären sechsseitigen Figur gelehrt worden, wird auch um den Cirkel die reguläre fünfseitige Figur, oder in und um die reguläre fünfseitige Figur ein Cirkel beschrieben.

§. 152.

Aufgabe: Man sucht zwey gerade Linien, deren Differenz AB, gegeben ist, und denen zwey gegebene gerade Linien AC, AD, umgekehrt proportionirt sind. Fig. 127.

Man lasse zwey gerade Linien HK, CD einander unter rechten Winkeln in A schneiden. Von A trage man

Digitized by Google

auf die eine die gegebene Differenz AB, und auf die andre die gegebenen Linien AC, AD, an entgegengesetzten Seiten. Man halbire AB in E, und CD in F, und errichte die Perpendikel EG, FG, die sich in G schneiden müssen. Aus G ziehe man mit GC = GD einen Cirkel durch C und D: so sind AH, AK, die gesuchten Linien.

Da GE senkrecht aus G: so ist §. 69. HE = EK. Nun ist AE = EB. Folglich ist HA = BK, folglich AB die Differenz von AH, AK, und es ist §. 146. AC : AH = AK : AD.

§. 153.

Aufgabe: Man sucht zwey gerade Linien, deren Summe AB, gegeben ist, und denen zwey gegebene gerade Linien AC, AD, unähnlich proportionirt sind. Fig. 128.

Es sey ein rechter Winkel BAD. Von A trage man auf den einen Schenkel die gegebene Summe AB, und auf den andern die gegebenen Linien AC, AD, an einerley Seite. Man halbire AB in E, und CD in F, und errichte die Perpendikel, EG, FG, die sich in G schneiden müssen. Aus G ziehe man mit GC = GD einen Cirkel durch C und D: so sind AH, AK, die gesuchten Linien.

Da GE senkrecht auf HK, so ist §. 69. HE = EK. Nun ist AE = EB. Folglich ist AH = KB, folglich AB die Summe von AH, AK; und es ist §. 147. AC : AH = AK : AD.

Zwey-

Digitized by Google

Zweytes Capitel.

Von den körperlichen Figuren, oder die Stereometrie.

I. Lage der Ebenen.

§. 154.

1. Eine Ebene ist durch Punkte oder Linien gelegt, wenn solche Punkte oder Linien in dieser Ebene sind.

2. Eine gerade Linie ist senkrecht auf einer Ebene, wenn sie auf allen geraden Linien, die man in der Ebene aus dem Durchschnittspunkte ziehet, senkrecht ist.

3. Eine gerade Linie ist geneigt gegen eine Ebene, wenn sie auf derselben nicht senkrecht ist.

4. Zwey Ebenen sind auf einander senkrecht, wenn jeder in der einen Ebene auf die Durchschnittslinie gefällte Perpendikel auf der andern Ebene senkrecht ist.

5. Ebenen sind geneigt gegen einander, wenn sie nicht senkrecht auf einander sind.

6. Ist eine gerade Linie geneigt gegen eine Ebene, und man ziehet von einem willkürlichen Punkte derselben eine gerade senkrecht auf die Ebene, und verbindet mittelst einer geraden Linie den Durchschnittspunkt der senkrechten mit dem der geneigten: so heißt der spitze Winkel, den mit solcher Verbindungslinie die geneigte Linie macht, ihre Neigung gegen die Ebene.

Digitized by Google

7. Sind zwey Ebenen geneigt gegen einander, und man errichtet auf der Durchschnittslinie in einerley willkürlichem Punkte in jeder Ebene einen Perpendikel: so heißt der spitze Winkel, den solche Perpendikel einschließen, die Neigung der Ebenen gegen einander.

8. Eine gerade Linie ist einer Ebene parallel, wenn sie mit der Ebene nie zusammenläuft, so weit man beyde auch verlängert.

9. Zwey Ebenen sind parallel, wenn sie nie zusammentreffen, so weit man auch beyde verlängert.

§. 155.

Jede gerade Linie, von welcher ein Theil in einer Ebene AB, ist ganz in dieser Ebene. Fig. 129.

Gesetzt, es wäre von einer geraden Linie ein Theil CD in der Ebene, und der andere Theil, wie DE, über der Ebene: so könnte man §. 2. Zus. 1. CD in der Ebene nach F verlängern. Demnach hätten zwey gerade Linien CDE, CDF, einen Theil CD mit einander gemein, welches §. 2. Zus. 4. unmöglich ist.

Zusatz. 1. Durch jede gerade Linie läßt sich also eine Ebene legen.

2. Jede gerade Linie schneidet eine Ebene nur in einem Punkte.

§. 156.

Zwey gerade Linien, CD, EF, welche einander schneiden, sind in einer Ebene; auch jeder Triangel GDF, ist in einer Ebene. Fig. 130.

Gesetzt es wäre von dem △GDF, ein Stück GHK in der Ebene AB, und das andre HFDK, über solcher Ebene: so wären die geraden Linien GF, GD, nicht ganz in der Ebene AB, welches §. 155. unmöglich ist.

Folg-

Digitized by Google

Folglich ist der ganze △GDF in der Ebene AB, in welcher auch GD, GF, folglich §. 155. auch CD, EF, sind.

Zusatz. Durch jede drey Punkte G, F, D, wie auch durch jeden Winkel CGE, läßt sich also eine Ebene legen.

§. 157.

Zwey Ebenen AB, CD, schneiden einander in einer geraden Linie, EF. Fig. 131.

Gesetzt der Durchschnitt der Ebenen, EF, wäre keine gerade Linie: so sey irgend eine andre Linie von E nach F gerade, etwa die EGF in der Ebene CD, und die EHF in der Ebene AB. Diese würden demnach zwey Punkte E und F gemein haben, welches §. 2. Zus. 4. unmöglich ist.

§. 158.

Eine gerade Linie CD, ist auf einer Ebene AB senkrecht, wenn sie auf zwey geraden Linien EF, GH, die man in solcher Ebene durch den Durchschnittspunkt C, ziehet, senkrecht ist. Fig. 132.

Man ziehe in der Ebene AB durch C willkürlich eine dritte Linie KL: so sage ich, daß CD auch auf KL, folglich §. 154. 2. auf der Ebene AB senkrecht ist.

Denn man mache EC = CF, GC = CH, und ziehe EH, GF; DE, DK, DH; DG, DL, DF.

Da EC = CF, HC = CG, und §. 25. ECH = GCF: so ist §. 14. EH = FG, und HEC = CFG.

Da HEC = CFG, und §. 25. ECK = FCL, auch EC = CF: so ist §. 14. EK = FL, und KC = CL.

Da DC senkrecht, folglich DCE = DCF, auch EC = CF, und CD = CD: so ist §. 14. DE = DF; und aus gleichem Grunde DH = DG. Nun war auch EH = FG. Folglich ist §. 17. DEH = DFG.

Digitized by Google

Da DEH = DFG, DE = DF, EK = FL: so ist §. 14. DK = DL. Nun war auch KL = CL, und CD = CD. Folglich ist §. 14. DCK = DCL, folglich §. 8. CD senkrecht auf KL.

§. 159.

Drey gerade Linien CD, CE, CF, die aus einem Punkte C, gehen, und auf denen eine vierte CG, in solchem Punkte C, senkrecht ist, sind zusammen in einer Ebene. Fig. 133.

Gesetzt, CE, CF, wären in der Ebene AB, aber CD über dieser Ebene: so schnitte §. 157. eine Ebene durch GCD, die Ebene AB in irgend einer geraden Linie CH.

Da CG auf CE, CF, senkrecht: so ist sie §. 158. auch auf CH senkrecht. Nun ist angenommen, daß sie auch auf CD senkrecht. Folglich wäre GCD = GCH, welches unmöglich ist.

§. 160.

Zwey gerade Linien CE, DF, sind parallel, wenn sie beyde auf einer Ebene AB, senkrecht sind. Fig. 134.

In der Ebene AB ziehe man CD, und DG senkrecht auf CD; mache DG = CE, und ziehe CG. Von E ziehe man EG, ED. Da EC senkrecht auf AB: so ist sie §. 154. 2. auf CD, CG, senkrecht. Aus eben dem Grunde ist FD auf DC, DG, senkrecht.

Da EC = DG, CD = CD, und ECD = CDG: so ist §. 14. ED = CG. Nun ist auch EC = DG, und EG = EG. Folglich ist §. 17. ECG = EDG = R. Demnach ist GD auf DC, DE, DF, senkrecht; folglich sind §. 159. diese drey genannten Linien in einer Ebene, in welcher auch §. 156. EC ist. Nun ist ECD + FDC = 2R. Folglich sind §. 41. EC, DF, parallel.

Zusatz.

Digitized by Google

Zusatz. Durch zwey Parallellinien EC, DF, läßt sich eine Ebene legen.

§. 161.

Eine gerade Linie, welche zwey Parallelen, EF, GH, schneidet, ist mit den Parallelen in einer Ebene AB. Fig. 135.

Gesetzt die schneidende Linie wäre nicht in AB, sondern drüber wie CKD: so wird §. 157. eine Ebene durch CKD die AB in einer geraden Linie CD schneiden. Demnach hätten zwey gerade Linien zwey Punkte C und D, gemein, welches §. 2. Zus. 4. unmöglich ist.

§. 162.

Ist von zwey Parallellinien EC, DF, die eine EC, auf einer Ebene AB, senkrecht: so ist es auch die andre DF. Fig. 134.

Durch EC, DF, lege man §. 160. Zus. eine Ebene, in welcher §. 161. auch ED, CD.

Da EC senkrecht auf AB: so ist §. 154, 2. ECD = R. Nun sind EC, DF, parallel, folglich §. 44. ECD + FDC = 2 R. Folglich ist FDC = R, und daher FD auf DC senkrecht.

Mache man in der Ebene AB, die DG auf CD senkrecht, EC = DG, und ziehe CG, EG: so ist §. 14. ED = CG, folglich §. 17. ECG = EDG = R, und daher GD auf DE senkrecht. Nun war GD auch auf DC senkrecht, folglich ist §. 158. GD auch auf DF senkrecht, oder FD auf DG. Nun war FD auch auf DC senkrecht. Folglich ist FD §. 158. auf der Ebene AB senkrecht.

Digitized by Google

§. 163.

Zwey gerade Linien, AB, CD, welche einer dritten EF, in einer andern Ebene parallel, sind selbst parallel. Fig. 136.

In EF nehme man einen willkürlichen Punkt G, und errichte in der Ebene durch AB, EF, den Perpendikel GH, und in der Ebene durch EF, CD, den Perpendikel GK: so ist §. 158. EF auf der Ebene durch HGK senkrecht. Folglich sind §. 162. auch ihre Parallelen AB, CD, auf solcher Ebene senkrecht, folglich §. 160. einander parallel.

§. 164.

Zwey Winkel ABC, DEF, in verschiedenen Ebenen, sind einander gleich, wenn ihre Schenkel parallel sind. Fig. 137.

Man mache BA = ED, BC = EF, und ziehe AD, BE, CF; AC, DF.

Da BA, ED, gleich und parallel: so sind §. 48. auch AD, BE, und aus eben den Gründen CF, BE, folglich §. 163. AD, CF gleich und parallel. Folglich sind §. 48. auch AC, DF, gleich und parallel. Folglich ist §. 17. ABC = DEF.

§. 165.

Aufgabe: Von einem Punkte C, einen Perpendikel auf eine Ebene AB, zu fällen. Fig. 138.

In der Ebene AB, ziehe man willkürlich DE, und fälle in der Ebene durch CDE den Perpendikel CF. Ist dieser senkrecht auf der Ebene: so ist das verlangte geschehen. Ist er es aber nicht: so errichte man in der Ebene AB auf DE den Perpendikel FG, und fälle in der Ebene durch CFG den Perpendikel CG: so ist solcher senkrecht auf AB.

In

Digitized by Google

In AB ziehe man durch G die HK der DE parallel. Da FD auf FC, FG, folglich §. 158. auf der Ebene CFG senkrecht: so ist §. 162. auch ihre Parallele HK auf solcher Ebene senkrecht, folglich §. 154, 2. auf FG, GC, das ist, CG ist auf GF, GK, folglich §. 158. auf der Ebene AB senkrecht.

§. 166.

Aufgabe: Auf einer Ebene AB, in einem Punkte L, einen Perpendikel zu errichten. Fig. 138.

Von einem willkürlichen Punkte über der Ebene fälle man §. 165. einen Perpendikel auf die Ebene. Trift dieser den Punkt L wie ML: so ist das verlangte geschehen. Trift er den Punkt L nicht, wie CG: so ziehe man LM der CG parallel: so ist §. 162. LM senkrecht auf AB.

§. 167.

Auf einer Ebene AB, können nicht in einem Punkte C, zwey Perpendikel CD, CE, seyn. Fig. 139.

Gesetzt CD, CE, wären beyde auf AB senkrecht, und man legte durch DCE eine Ebene, welche die AB §. 157. in der geraden Linie FG schnitte: so wären §. 154, 2, CD, CE, auf CG senkrecht, folglich ECG = DCG, welches unmöglich ist.

§. 168.

Schneiden einander zwey Ebenen, AC, AD: so kann eine gerade Linie, EF, nicht auf beyden zugleich senkrecht seyn. Daher sind zwey Ebenen parallel, wenn eine gerade Linie auf beyden zugleich senkrecht ist. Fig. 140.

Gesetzt EF wäre [redacted] beyden Ebenen, die sich in AB schneiden, senkrecht, und man nähme in AB einen willkürlichen Punkt G, und zöge EG, FG: so wäre §. 154, 2. FEG + EFG = 2 R. welches §. 28. unmöglich ist.

Ich

Ich sage ferner, daß zwey Ebenen parallel sind, wenn eine gerade Linie auf beyden zugleich senkrecht ist. Denn gesetzt sie wären nicht parallel; so liefen sie zusammen und schnitten einander. Demnach wäre auf zwey Ebenen, die einander schneiden, eine gerade Linie senkrecht, welches nach Obigen unmöglich ist.

§. 169.

Zwey Ebenen, AC, DF, sind parallel, wenn die Schenkel eines Winkels ABC, in der einen Ebene, den Schenkeln eines Winkels DEF, in der andern Ebene, parallel sind. Fig. 141.

Es sey §. 165. BG auf DF senkrecht, und man ziehe GH der DE, und GK der EF parallel.

Da AB der DE, und GH der DE parallel: so sind §. 163. AB, GH parallel, folglich §. 161. ABGH in einer Ebene, und §. 44. ABG = R. Nun ist eben so erweislich, daß CBG = R. Folglich ist §. 158. GB auf AC senkrecht. Nun war GB auch auf DF senkrecht. Folglich sind §. 168. AC, DF, parallel.

§. 170.

Werden zwey parallele Ebenen AB, CD, von einer dritten Ebene EF geschnitten: so sind die Durchschnittslinien EG, FH, parallel. Fig. 142.

Gesetzt EG, FH, wären nicht parallel, sondern träfen verlängert in einem Punkte zusammen: so wäre solcher Punkt in der verlängerten AB, und in der verlängerten CD. Demnach träfen die parallelen Ebenen AB, CD, zusammen, welches unmöglich ist.

§. 171.

Zwey gerade Linien AB, CD, werden von drey parallelen Ebenen HK, LM, NQ, in proportionirte Theile geschnitten. Fig. 143.

Man

Man ziehe AD, welche die Ebene LM in G schneidet; desgleichen EG, GF, AC, BD. Da LM, NO, parallel, und von der Ebene BG geschnitten werden: so sind §. 170. EG, BD, parallel. Eben so ist erweislich, daß GF, AC, parallel sind. Folglich ist §. 116. AE : EB = AG : GD, und CF : FD = AG : GD; folglich II. §. 73. AE : EB = CF : FD.

§. 172.

Ist eine gerade Linie CD, auf einer Ebene AB, senkrecht: so ist es auch jede Ebene EF, welche man durch solche Linie legt. Fig. 144.

Da CD senkrecht auf AB, folglich §. 154, 2. auch auf FG: so ist jede Linie wie KL, die man senkrecht auf FG in der Ebene EF, ziehet §. 41. der CD parallel, folglich §. 162. auch auf AB senkrecht. Folglich ist §. 154, 4. EF auf AB senkrecht.

§. 173.

Ist eine Ebene CD, auf einer andern AB, senkrecht; und man fällt von einem beliebigen Punkte F, in der einen Ebene CD, einen Perpendikel auf die andere Ebene AB: so trift solcher die Durchschnittslinie DE. Fig. 145.

Gesetzt es träfe ein solcher Perpendikel nicht die Durchschnittslinie, wie etwa FG: so sey in der Ebene AB, die GH auf DE senkrecht, und FH gezogen. Da CD und AB senkrecht auf einander: so ist §. 154, 4. GH auf CD, folglich §. 154, 2. auch auf HF senkrecht. Nun sollte FG auf AB, folglich auch auf GH senkrecht seyn. Demnach wäre FHG + FGH = 2 R. welches §. 28. unmöglich ist.

§. 174.

Digitized by Google

§. 174.

Sind zwey Ebenen, CE, DF, welche einander schneiden, auf einer dritten Ebene AB, senkrecht: so ist es auch ihre Durchschnittslinie CD. Fig. 146.

Gesetzt CD wäre nicht senkrecht auf AB, folglich auch nicht auf CF, CG: so sey in der Ebene CE, die CH auf CG, und in der Ebene DF, die CK auf CF senkrecht. Nun sind die Ebenen CE, DF, auf der Ebene AB senkrecht. Folglich sind §. 154, 4. auch CH, CK, auf AB senkrecht, welches §. 167. unmöglich ist.

II. Prismatische Körper.

§. 175.

1. Ein Prisma ist ein Körper, welcher von ebenen geradlinichten Figuren begrenzt wird, unter denen zwey einander entgegengesetzte gleich und ähnlich und parallel, die übrigen aber Parallelogramme sind. Erstere heißen seine Grundflächen, letztere seine Seitenflächen. So viel Seiten die Grundfläche hat, so viel Seitenflächen hat das Prisma, und heißt daher nach der Anzahl der Seitenflächen, dreyseitig, vierseitig, vielseitig. Die geraden Linien, worinn jede zwey Seitenflächen einander schneiden, heißen die Seitenlinien des Prisma. Die Höhe des Prisma ist der Abstand der einen Grundfläche von der andern. Legt man durch zwey gleichliegende Diagonalen der Grundflächen eine Ebene; so heißt solche eine Diagonalebene des Prisma.

2. Ein Prisma heißt gerade oder schief, je nachdem die Seitenlinien, und daher auch die Seitenflächen, auf den Grundflächen senkrecht sind, oder nicht. Daher sind die Seitenflächen eines geraden Prisma Rectangel.

3. Ein

Digitized by Google

3. Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepiped, worinn also jede zwey entgegengesetzte Seitenflächen auch, wie die Grundflächen, parallel sind. Ein gerades Parallelepiped, dessen Grundflächen Rectangel sind, heißt rechtwinklicht. Ein rechtwinklichtes Parallelepiped, welches von sechs Quadraten begrenzt wird, heißt ein Würfel, oder Cubus.

4. Ein körperlicher Winkel, oder eine Ecke, ist die Neigung, wenigstens dreyer geraden Linien gegen einander, welche in einem Punkte zusammentreffen, aber nicht in ein und derselben Ebene liegen. Ein körperlicher Winkel wird daher von wenigstens drey ebenen Winkeln eingeschlossen, deren Spitzen und Schenkel zusammentreffen. Körperliche Winkel sind gleich, wenn sie von gleich vielen gleichen ebenen Winkeln eingeschlossen werden.

5. Aehnliche Körper sind solche, die von gleich vielen ähnlichen Ebenen begrenzt werden.

6. Congruente Körper sind solche, die in einander passen, oder deren Grenzen sich decken. Solche Körper sind gleich und ähnlich, oder werden von gleich vielen gleichen und ähnlichen Ebenen begrenzt. Doch können Körper gleich seyn, ohne daß sie zugleich ähnlich sind.

§. 176.

Von drey ebenen Winkeln, BAC, CAD, DAB, welche einen körperlichen Winkel, A, einschließen, sind jede zwey zusammen größer, als der dritte. Fig. 147.

Sind die drey ebenen Winkel einander gleich: so ist der Satz für sich klar; sind sie aber ungleich: so sey etwa BAC

BAC größer, und §. 35. BAE = BAD, auch §. 13. AE = AD. Man ziehe BEC, CD, DB.

Da AD = AE, BA = BA, und BAD = BAE: so ist §. 14. DB = BE. Nun ist §. 32. DB + DC > BE + EC. Folglich ist DC > EC, folglich §. 36. DAC > CAE. Nun war BAD = BAE. Folglich ist BAD + DAC > BAE + CAE, das ist, BAD + DAC > BAC.

§. 177.

Die ebenen Winkel DAB, BAC, CAD, welche einen körperlichen Winkel A, einschließen, sind zusammen kleiner als vier rechte Winkel. Fig. 148.

Ziehet man DB, BC, CD: so entstehen noch drey körperliche Winkel, D, B, C, deren jeder von drey ebenen Winkeln eingeschlossen ist. Folglich ist §. 176. CBA + ABD > DBC; BDA + ADC > CDB; DCA + ACB > DCB. Nun sind §. 46. die drey letztgenannten Winkel zusammen zwey rechten Winkeln gleich. Folglich sind die sechs erstgenannten Winkel zusammen größer als zwey rechte Winkel. Nun sind §. 46. die Winkel DAB, BAC, CAD, nebst den sechs erstgenannten Winkeln zusammen sechs rechten Winkeln gleich. Folglich ist DAB + BAC + CAD < 4 R.

Zusatz. Auf ähnliche Art würde der Beweiß geführt, wenn der körperliche Winkel A, von mehr als drey ebenen Winkeln eingeschlossen würde. Folglich gilt der Satz allgemein von jedem körperlichen Winkel.

§. 178.

Aufgabe: Aus drey ebenen Winkeln ABC, DEF, GHK, welche zusammen kleiner als vier rechte Winkel, und deren jede zwey zusammen größer als der dritte sind, einen körperlichen Winkel zu machen. Fig. 149. 150. 151.

Erster-

Digitized by Google

Erster Theil.

Man mache alle Schenkel der gegebenen Winkel einander gleich, und ziehe AC, DF, GK: so läßt sich §. 37. * aus solchen Linien ein Triangel machen. Es sey dies §. 34. der △LMN, so daß NL = AC; LM = DF; MN = GK sey. Man beschreibe §. 102. um den △LMN einen Cirkel, und ziehe von dessen Mittelpunkte O, die gerade Linie ON: so ist zu beweisen, daß AB > ON sey; der Mittelpunkt O mag nun in, oder über, oder unter LM fallen.

1) Er sey in LM. Fig. 149. Wäre nun AB=ON, oder AB < ON; so wäre, weil AB = DE = EF, und ON = OL = OM, im ersten Falle DE + EF = LM, im zweyten Falle DE + EF < LM, welches beydes, weil LM = DF, §. 32. unmöglich ist. Folglich muß AB > ON seyn.

2) Er sey über LM, Fig. 150. und OL, OM gezogen. Wäre nun AB = ON, folglich BC = OL, auch AC = LN: so wäre §. 17. ABC = NOL. Nun wäre eben so erweislich, DEF = LOM, und GHK = MON. Folglich wäre ABC + DEF + GHK = NOL + LOM + MON = 4 R. (§. 25.) welches nach dem Angenommenen unmöglich ist. Wäre hingegen AB < ON: so sey OP = AB und OQ = BC, folglich PN = QL; folglich §. 116. PQ, NL, parallel; folglich §. 116. ON : OP = NL : PQ. Nun ist ON > OP, folglich NL > PQ. Nun ist NL = AC. Folglich wäre AC > PQ. Folglich wäre §. 37. ABC > NOL. Nun wäre eben so erweislich DEF > LOM und GHK > MON. Folglich wäre ABC + DEF + GHK > NOL + LOM + MON, folglich §. 25. > 4 R. welches nach dem Angenommenen unmöglich ist. Demnach muß AB > ON seyn.

Digitized by Google

3) Er sey unter LM Fig. 151. und OL, OM, gezogen. Wäre nun AB = ON: so wäre wie beym zweyten Falle ABC + DEF + GHK = NOL + LOM + MON = 4 R. gegen das Angenommene. Wäre hingegen AB < ON so sey wiederum OP = OQ = OR = AB, folglich wiederum PQ der LM, PR der MN parallel, und daher QPR = LNM, auch ABC > LON, und GHK > NOM, folglich ABC + GHK > LOM: alles wie beym zweyten Falle. Es sey daher NOS = ABC, und NOT = GHK, folglich SOT = ABC + GHK, auch OS = OT = AB, und PS, PT, TS gezogen: so ist §. 14. PS = AC = NL, und PT = GK = NM. Nun ist offenbar LNM = QPR > SPT. Folglich ist §. 36. DF = LM > ST, folglich §. 37. DEF > SOT. Nun war SOT = ABC + GHK. Folglich wäre DEF > ABC + GHK, gegen das Angenommene. Demnach muß AB > ON seyn.

Zweyter Theil.

Da also in allen Fällen AB > ON: so sey §. 98. * eine gerade Linie cd so, daß $AB^q = ON^q + cd^q$, und §. 166. OV auf den Cirkelebenen Fig. 149. 150. 151. senkrecht, auch OV = cd, folglich $AB^q = ON^q + OV^q$. Man ziehe VL, VM, VN: so ist V der verlangte körperliche Winkel.

Da OV senkrecht auf der Ebene, folglich auch auf OL, OM, ON: so ist VOL = VON. Nun ist auch OL = ON, und OV = OV. Folglich ist §. 14. VL = VN. Nun ist aus eben den Gründen VM = VN. Folglich ist VL = VM = VN.

Da VON ein rechter Winkel: so ist $VN^q = ON^q + OV^q$. Nun ist auch $AB^q = ON^q + OV^q$. Folglich ist $VN^q = AB^q$, folglich VN = AB. Nun war VN = VM = VL, und AB = BC = DE = DF = GH = HK. Auch war LN = AC, LM = DF, MN = GK

GK. Folglich ist §. 17. LVN = ABC, LVM = DEF, MVN = GHK. Demnach bestehet der körperliche Winkel V aus den gegebenen ebenen Winkeln. (§. 175, 4.)

§. 179.

Sind von den Ebenen, welche einen Körper begrenzen, jede zwey entgegengesetzte einander parallel: so sind solche Ebenen Parallelogramme, und immer die entgegengesetzten einander gleich. Fig. 152.

Da die Parallelebenen BG, CE, und die Parallelebenen BF, AE, von einer dritten Ebene AC geschnitten werden: so sind §. 170. die Durchschnittslinien AB, CD, und AD, CB, parallel, folglich AC ein Parallelogramm. Eben so ist dieses von allen übrigen Ebenen erweislich.

Ziehet man in zwey entgegengesetzten Ebenen die Diagonalen AH, DF: so ist §. 49. Zus. 1. BG = 2 ΔABH, und CE = 2 ΔDCF. Nun sind AB, CD; BH, CF, parallel und gleich, und daher §. 164. 14. ΔABH = ΔDCF. Folglich ist BG = CE. Eben so ist dieses von allen übrigen entgegengesetzten Ebenen erweislich.

Zusatz. Jedes Prisma, welches ein Parallelogramm CE zur Grundfläche hat, das hat auch parallele Seitenflächen. Denn da AB der GH, und BC der HF parallel ist: so ist §. 169. BD, HE, und aus eben den Gründen AE, BF, parallel. Daher heißt ein solches Prisma ein **Parallelepiped.**

§. 180.

Wird ein Parallelepiped ABCD, von einer Ebene EF, den Seitenflächen AB, CD, parallel geschnitten: so verhalten sich die abgeschnittenen Theile AF, ED, wie ihre Grundflächen AH, EK. Fig. 153.

Sind erstlich, AE, EC, commensurabel: so wird ein Theil von EC, wie EL in AE aufgehen. Es sey daher EC = 2 EL, und AE = 3 EL. Legt man durch die

Digitized by Google

Theilpunkte Linien mit AG, CK parallel: so entstehen gleiche Parallelogramme als HL; und, wenn man durch solche Linien Ebenen mit AB, CD, parallel legt, auch gleiche Parallelepipede, als FL, wie leicht erweislich ist. Demnach ist auch EK = 2 HL, und AH = 3 HL, auch ED = 2 FL, und AF = 3 FL. Folglich ist §. 113. AF : ED = AH : EK.

Sind zweytens AE, EC, incommensurabel: so wird bey jeder Theilung der EC, ein Theil, wie EL, etlichemal in AE, mit einem kleinern Reste, und daher HL in AH, und FL in AF, eben so vielmal mit einem kleinern Reste enthalten seyn. Folglich ist auch alsdann §. 113. AF : ED = AH : EK.

§. 181.

Aufgabe: An einer geraden Linie AB, einen körperlichen Winkel zu beschreiben, welcher einem gegebenen D gleich sey. Fig. 154.

Der gegebene körperliche Winkel D, sey von den ebenen Winkeln EDC, CDF, FDE, eingeschlossen, so daß DF über der Ebene EDC sey. In DF nehme man einen beliebigen Punkt F, fälle §. 166. von demselben den Perpendikel FG auf die Ebene EDC, und ziehe in solcher Ebene DG. Hierauf mache man BAH = EDC, und BAK = EDG, folglich HAK = CDG. Nun sey AK = DG, und §. 167. KL senkrecht auf der Ebene BAH, auch KL = GF, und AL gezogen: so ist der körperliche Winkel A = D.

Man mache AB = DE, AH = DC, und ziehe CG, EG, CF, EF; HK, BK, HL, BL.

Da BA = ED, AK = DG, und BAK = EDG: so ist §. 14. BK = EG. Nun war auch KL = GF, und §. 154. 2. BKL = EGF. Folglich ist §. 14. BL = EF. Da ferner AK = DG, KL = GF, und §. 154. 2. AKL = DGF:

Digitized by Google

= DGF: so ist §. 14. LA = FD. Da endlich KA = GD, AH = DC, und KAH = GDC: so ist §. 14. HK = CG. Nun war auch KL = GF und §. 154, 2. HKL = CGF. Folglich ist §. 14. HL = CF.

Da AB = DE gemacht, und bewiesen BL = EF, LA = FD: so ist §. 17. BAL = EDF. Da HA = CD gemacht, und bewiesen LA = FD, HL = CF: so ist §. 17. LAH = FDC. Nun ist auch BAH = EDC gemacht. Folglich ist §. 175, 4. der körperliche Winkel A = D.

§. 182.

Aufgabe: Auf einer geraden Linie AB, ein Parallelepiped zu beschreiben, welches einem gegebenen CD, ähnlich sey. Fig. 155.

Man beschreibe §. 181. an AB einen körperlichen Winkel A = C, so daß BAK = ECG, KAH = GCF, HAB = FCE. Man mache §. 126. EC : CG = BA : AK, und CG : CF = AK : AH; folglich II. §. 81. EC : CF = BA : AH, und vollende das Parallelogramm BK, und das Parallelepiped AL: so ist §. 114. BK ∽ EG, KH ∽ GF, HB ∽ FE; folglich §. 179. auch die entgegengesetzten Ebenen einander ähnlich, folglich §. 175, 5. AL ∽ CD.

§. 183.

Jedes Parallelepiped DH, wird von der Diagonalebene ADFH, halbirt. Fig. 152.

Da §. 49. Zus. 1. △ABH = △AHG, und △DCF = △EFD, auch §. 179. CA = FG, und ADFH = ADFH: so ist §. 175, 6. Prisma ABHFDC = AGHFED.

Zusatz. 1. Ein dreyseitiges Prisma ist daher die Hälfte eines Parallelepipeds von gleicher Höhe und gedoppelter Grundfläche.

Digitized by Google

2. Wird das Parallelepiped DH, durch zwey entgegengesetzte Seitenflächen BD, HE, von einer Diagonalebene geschnitten: so sind die daher entstehende Prismata auch einander gleich, und daher jedes die Hälfte des Parallelepipeds DH. Folglich ist das Prisma ADCFEG = AGHFED, wovon jenes CE, dieses ΔFED zur Grundfläche hat, so daß CE = a ΔFED, und beyder Höhe gleich ist.

§. 184.

Parallelepipede ABHF, ABKG, von gleicher Höhe, und auf ein und derselben Grundfläche AB, sind einander gleich. Fig. 156. 157. 159.

Erstlich mögen Fig. 156. die Seitenlinien beyder Körper in einerley geraden Linien FM, DK, sich endigen.

Da §. 49. DH = CB, und EK = CB: so ist DH = EK, folglich DE = HK, folglich §. 54. FE = LK, und §. 56. ΔDCE = ΔHBK. Eben so ist erweislich ΔFAG = ΔLMN. Nun ist auch §. 179. AD = NH und AE = NK. Folglich ist §. 175, 6. Prisma AFGEDC = NLMKHB. Setzt man zu beyden den Körper ABHG hinzu: so ist ABHF = ABKG.

Zweytens mögen Fig. 157. die Seitenlinien beyder Körper in einerley geraden Linien FE, LK, sich endigen.

Hier ist eben so erweislich FG = DE, folglich FM = DK, und ΔAFG = ΔCDE; auch ΔLMN = ΔBHK; ferner AL = CH, und AM = CK; folglich Prisma AFGDEC = LMNHKB. Setzt man nun zu beyden den Körper ABHG: so ist wiederum ABHF = ABKG.

Drittens mögen Fig. 159. die Seitenlinien beyder Körper in verschiedenen geraden Linien FL, DH; GM, EK, sich endigen.

Man

Digitized by Google

Man verlängere MG nach R, LH nach Q, KE nach O, FD nach O, und ziehe AR, CO, NP, BQ: so ist nach dem ersten Falle ABQR = ABKG, und nach dem zweyten Falle ABQR = ABHF. Folglich ist wiederum ABHF = ABKG.

Zusatz. Jedes schiefe Parallelepiped ABKG läßt sich in ein gerades verwandeln, wenn man auf einer der beyden Grundflächen Seitenlinien perpendiculär errichtet, und solche bis zur andern Grundfläche verlängert.

§. 185.

Parallelepipede von gleicher Höhe und auf gleichen Grundflächen sind einander gleich. Fig. 158.

Die beyden Parallelepipede sind entweder gerade oder schief. Da man §. 184. Zus. letztre in erstere verwandeln kann: so gilt der Satz, wenn er von den geraden bewiesen ist, auch von den schiefen. Sind beyde Parallelepipede gerade: so haben ihre gleichen Grundflächen entweder einerley Wigkel, oder nicht.

Sind zuerst die gleichen Grundflächen AB, CD, der beyden gleichhohen geraden Parallelepipede, gleichwinklicht, so bringe man diese Grundflächen so an einander, daß AED, desgleichen BEC in gerader Linie sind, weil AEB = CED ist. Vollendet man die Parallelogramme AC, BD, und die Parallelepipede auf diesen Grundflächen, und ziehet FEH: so ist solche die Diagonale des Parallelogramms GK, so daß die Diagonalebene durch FH das Parallelepiped auf GK halbirt, und daher die Körper auf FKH und FGH gleich sind. Aus eben den Gründen sind die Körper auf FCE, und FAE, nicht weniger die Körper auf EDH, und EBH, gleich. Nimmt man solche von den gleichen Körpern auf FKH und FGH hinweg: so sind die übriggebliebenen Körper auf CD und AB gleich.

Digitized by Google

Sind zweytens solche Grundflächen nicht gleichwinklicht, wie AB, LD: so verwandle man LD in CD, und es ist leicht erweislich, daß das Prisma auf ECL, dem auf KDM, gleich sey; folglich, wenn man beyden den Körper auf LEDK, beyfügt, das Parallelepiped auf LD, dem auf CD, folglich auch dem auf AB, gleich seyn müsse.

§. 186.

Parallelepipede, AB, CD, von gleicher Höhe, verhalten sich wie ihre Grundflächen AE, CF. Fig. 160.

Auf GF beschreibe man §. 63. FH = AE, und vollende das Parallelepiped GK: so ist §. 185. GK = AB. Nun ist §. 180. GK : CD = FH : CF. Folglich ist AB : CD = AE : CF.

Zusatz. 1. Haben zwey Parallelepipede GK, CD, gleiche Grundflächen, KH, DG: so verhalten sie sich wie ihre Höhen, HG, GC. Denn es ist nach Obigem GK : CD = HF : CF und §. 115. HF : CF = HG : GC. Folglich ist GK : CD = HG : GC.

2. Da ein dreyseitiges Prisma die Hälfte eines Parallelepipeds ist: so gilt der Satz auch von dreyseitigen prismatischen Körpern.

§. 187.

Jede prismatische Körper von gleicher Höhe, verhalten sich wie ihre Grundflächen. Fig. 161.

Es sey die Grundfläche eines vielseitigen Prisma ABCDE, eines andern von gleicher Höhe FGHKL. Man theile beyde durch Diagonalen in Triangel; und nenne die dreyseitigen Prismata über solchen Triangeln, M, N, O; P, Q, R. Da §. 186. Zus. 2. M : N = ABC : ACD; so ist II. §. 79. M + N : N = ABCD : ACD. Nun ist auch

N

Digitized by Google

N:O = ACD:ADE. Folglich ist II. §. 81. M + N:O = ABCD : ADE, folglich II. §. 79. M + N + O : O = ABCDE : ADE. Nun ist auch O : R = ADE : FKL. Folglich ist II. §. 81. M + N + O : R = ABCDE : FKL. Nun ist eben so erweislich P + Q + R : R = FGHKL : FKL. Folglich ist II. §. 81. M + N + O : P + Q + R = ABCDE : FGHKL.

Zusatz. Prismatische Körper von gleichen Grundflächen, verhalten sich wie ihre Höhen.

§. 188.

Parallelepipede AB, CD, sind in zusammengesetzter Verhältniß ihrer Grundflächen AE, CF, und Höhen EB, FD. Fig. 162.

Man mache FG = AE, und vollende das Parallelepiped DG: so ist §. 186. Zus. 1. AB : DG = BE : DF, und §. 186. DG : CD = FG : CF = AE : CF. Folglich ist II. §. 83. AB : CD = BE . AE : DF . CF.

Zusatz. Auf eben die Art beweist man ein Gleiches von jeden prismatischen Körpern.

§. 189.

Aehnliche Parallelepipede AB, CD, sind in cubischer Verhältniß ihrer gleichliegenden Seiten, AE, CF. Fig. 163.

Man verlängre AE, GE, HE, bis ET = CF, EK = FM, EL = FQ ist; und vollende das Parallelogramm KT, und die Körper OT, KP; desgleichen das Parallelogramm GT, und den Körper EN.

Da CD ∾ AB: so ist MFC = GEA = KET. Nun ist CF = ET; FM = EK; und daher CF : FM =

Digitized by Google

ET : EK. Folglich ist CM ≅ TK. Nun ist eben so erweislich CQ ≅ LT, und DF ≅ EO. Folglich CD ≅ OT ∼ AB, folglich AE : ET = GE : EK = HE : EL. Nun ist §. 115. 186. AE : ET = AG : GT = AB : EN; und GE : EK = GT : TK = EN : KP; desgleichen HE : EL = HT : TL = KP : OT. Folglich ist AB : EN = EN : KP = KP : OT, folglich II. §. 85. AB : OT (AB : EN)^3 = AE^c : ET^c. Nun war OT = CD, und ET = CF. Folglich ist AB : CD = AE^c : CF^c.

Zusatz. 1. Sind vier gerade Linien a, b, c, d, proportionirt: so sind die auf denselben beschriebenen ähnlichen Parallelepipede A, B, C, D, gleichfalls proportionirt; und umgekehrt; weil A : B = a^c : b^c, und C : D = c^c : d^c.

2. Sind vier gerade Linien a, b, c, d, stetig proportionirt, und es sind auf der ersten a, und zweyten b, ähnliche Parallelepipede A, B: so ist A : B = a : d; weil A : B = a^c : b^c und a : d = a^c : b^c.

3. Diese Sätze gelten auch von ähnlichen dreyseitigen prismatischen Körpern, als den Hälften der Parallelepipeden; und daher auch von den vielseitigen.

III. Körper, die nicht prismatisch sind.

§. 190.

1. Ein Cylinder ist ein Körper, welcher von zwey gleichen und parallelen Cirkelflächen, deren Mittelpunkte eine gerade Linie, welche die Axe heißt, verbindet, als von seinen Grundflächen, und von einer krummen Oberfläche begrenzt wird, welche um die Peripherien beyder Grundflächen gelegt, und so beschaffen ist, daß jede gerade Linie, welche man von irgend einem Punkte der Peripherie einer der beyden Grund-

Grundflächen der Axe parallel ziehet, ganz in diese Oberfläche fällt.

2. Die Höhe eines Cylinders ist der Abstand der beyden Grundflächen von einander.

3. Cylinder sind ähnlich, wenn ihre Axen den Durchmessern oder Halbmessern ihrer Grundflächen proportionirt sind.

4. Der Cylinder heißt gerade, oder schief, je nachdem die Axe den Grundflächen senkrecht, oder nicht senkrecht ist.

Zusatz. 1. Ein Cylinder wird von einer Cirkelfläche beschrieben, welche sich an einer geraden Linie so herabbewegt, daß sie sich immer parallel bleibt.

2. Ein gerader Cylinder wird von einem Rectangel beschrieben, welches sich rings um seine unverrückte Seite drehet. Die Axe ist die unverrückte Seite, um welche sich das Rectangel drehet. Die Oberfläche ist die krumme Fläche, welche die der Axe entgegengesetzte Seite beschreibt. Die Grundflächen sind die Cirkel, welche von den übrigen Seiten des Rectangels beschrieben werden. Die Höhe ist die Axe selbst.

§. 191.

Wird ein Cylinder AB, von einer Ebene EF, der Grundfläche parallel geschnitten: so ist jeder solcher Schnitt ein der Grundfläche gleicher Cirkel, und sein Mittelpunkt G, in der Axe CD. Fig. 164.

Es werde der Durchschnitt EF, von der Axe in G getroffen. Auch trift die AH, welche der CD parallel ist, den Umfang des Durchschnitts in E. Ferner ist §. 170.

GE

Digitized by Google

GE der CA parallel, folglich §. 49. GE = CA. Eben so beweist man, daß GK = CL. Nun ist die Grundfläche ein Cirkel, und daher CA = CL. Folglich ist ist GK = CA = GE. Nun gilt dies von allen Linien wie GK, GE. Folglich ist der Durchschnitt ein Cirkel, dessen Mittelpunkt G, und dessen Halbmesser GE = CA. Folglich ist der Durchschnitt der Grundfläche gleich.

Zusatz. Ein Durchschnitt durch die Axe CD, giebt ein Parallelogramm ANBH, und zwar ein Rectangel beym geraden Kegel.

§. 192.

Eine Pyramide ist ein Körper, der von ebenen geradlinichten Figuren begrenzt wird, welche außer einer, der Grundfläche, Triangel seyn müssen, die in einem Punkte, welcher außer der Grundfläche liegt, zusammentreffen, und Seitenflächen heißen. So viel Seiten die Grundfläche hat, so viel Seitenflächen hat die Pyramide, und heißt daher nach der Anzahl der Seitenflächen, dreyseitig, vierseitig, vielseitig. Die geraden Linien, worinn jede zwey Seitenflächen einander schneiden, heißen die Seitenlinien der Pyramide. Ihre Spitze ist der Punkt, worinn die Seitenflächen zusammentreffen. Ihre Höhe ist der Abstand der Spitze von der Grundfläche.

Zusatz. Nimmt man außerhalb einer ebenen geradlinichten Figur willkürlich einen Punkt an, ziehet von solchem gerade Linien nach den Winkelspitzen der Figur, und legt durch diese Linien Ebenen: so entsteht eine Pyramide.

§. 193.

Digitized by Google

§. 193.

Wird eine Pyramide ABE, mittelst einer Ebene der Grundfläche parallel geschnitten: so ist der Durchschnitt GK, der Grundfläche BE, ähnlich. Fig. 165.

Da §. 170. GL der BF, und GH der BC parallel: so ist §. 164. HGL = CBF, und §. 116. AG : AB = GL : BF = GH : BC. Nun wird solches auf eben die Art von den übrigen Winkeln und Seiten bewiesen. Folglich ist §. 114. GK ∾ BE.

Zusatz. 1. Demnach ist §. 136. Zus. GK : BE = GL^q : BF^q = AG^q : AB^q.

2. Ist AN senkrecht auf BE, folglich auch auf GK, und man ziehet GM, BN: so ist AMG = ANB, folglich GM der GN parallel, und daher AM : AN = AG : AB. Folglich ist auch GK : BE = AM^q : AN^q, das ist, die Durchschnitte sind in quadratischer Verhältniß ihrer Entfernungen von der Spitze.

§. 194.

Ein Kegel ist ein Körper, welcher von einer Cirkelfläche, als Grundfläche, und von einer krummen Oberfläche begrenzt wird, welche von einem Punkte außerhalb der Grundfläche, als der Spitze, um die Peripherie der Grundfläche gelegt, und so beschaffen ist, daß jede gerade Linie von der Spitze nach der Peripherie der Grundfläche ganz in diese Oberfläche fällt. Diese gerade Linie heißt die Seite des Kegels. Seine Axe ist eine gerade Linie von der Spitze nach dem Mittelpunkt der Grundfläche. Seine Höhe ist der Abstand der Spitze von der Grundfläche. Ein gerader Kegel heißt, dessen Axe auf der Grundfläche senkrecht ist; ein schiefer Kegel, dessen Axe auf der Grundfläche

fläche nicht senkrecht ist. Jeder Schnitt durch di Axe ist ein Triangel. Kegel sind ähnlich, wenn ihr Axen den Durchmessern der Grundflächen proportio nirt sind.

Zusatz. Ein gerader Kegel wird von einem recht winklichten Triangel beschrieben, wenn sich solcher ring um seinen unverrückten Perpendikel drehet. Dieser un verrückte Perpendikel ist die Axe und Höhe des Kegels Die Grundfläche ist der Cirkel, der von dem andern be wegten Perpendikel beschrieben wird. Die Seite ist die Hypothenuse des bewegten Triangels. Jeder Schnitt durch die Axe des geraden Kegels ist ein gleichschenklich ter Triangel. Je nachdem die Schenkel dieses Triangels einen rechten, oder stumpfen, oder spitzen Winkel ein schließen, heißt der Kegel, rechtwinklicht, oder stumpf winklicht, oder spitzwinklicht.

§. 195.

Wird ein Kegel ABD, mittelst einer Ebene der Grundfläche parallel geschnitten: so ist der Durch schnitt FK, ein Cirkel, dessen Mittelpunkt G, in der Axe AC, liegt. Fig. 166.

Schneidet man den Kegel durch die Axe AC: so ist jeder Durchschnitt wie GF, der CB parallel, folglich AC : CB = AG : GF. Eben so ist AC : CE = AG : GH, oder weil CE = CB, AC : CB = AG : GH. Folglich ist GF = GH. Nun wird dieses von allen andern Durch schnitten wie von GF, GH bewiesen. Folglich ist FK ein Cirkel, und G dessen Mittelpunkt.

Zusatz. Demnach ist FK : BD = GF^q : CB^q = AG^q : AC^q = AM^q : AN^q, das ist, die Durchschnitte sind in quadratischer Verhältniß der Entfernungen von der

der Spitze, wo AL senkrecht auf BD, und daher auch auf FK ist.

§. 196.

Eine **Kugel**, Sphäre, wird von einem halben Cirkel beschrieben, wenn derselbe rings um seinen unverrückten Durchmesser gedrehet wird. Die Axe der Kugel ist dieser unverrückte Durchmesser, und der **Mittelpunkt** der Kugel der Mittelpunkt des bewegten halben Cirkels. Die **Kugelfläche** ist die krumme Oberfläche, welche die Peripherie des halben Cirkels beschreibt. Der **Durchmesser** der Kugel ist jede gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt gehet, und an beyden Seiten von der Kugelfläche begrenzt wird. Alle Durchmesser und Halbmesser einer Kugel sind einander gleich. Kugeln sind einander gleich, deren Durchmesser oder Halbmesser gleich sind. Wird die Kugel von einer Ebene durch den Mittelpunkt geschnitten: so ist der Durchschnitt ein Cirkel, welcher mit der Kugel einerley Mittelpunkt und Durchmesser hat. Daher sind alle Durchschnitte durch den Mittelpunkt gleich große Cirkel. Jede Ebene durch den Mittelpunkt halbirt die Kugel.

§. 197.

Jeder Kugelschnitt AB, ist ein Cirkel, dessen Mittelpunkt D, von dem aus dem Kugelmittelpunkte C, gefällten Perpendikel, CD, getroffen wird. Fig. 167.

Da der Schnitt AB, innerhalb der Kugel: so muß jede Linie aus dem Mittelpunkte nach dem Schnitte, folglich noch mehr der Perpendikel CD, kleiner als der Halbmesser CA seyn. Ziehet man nun DA: so ist $DA^q = CA^q - CD^q$. Nun wird eben dies von allen Linien bewiesen, die man wie DA, von D nach dem Umfange des

Schnitts

Schnitts ziehet. Folglich ist der Schnitt ein Cirkel, und D sein Mittelpunkt.

§. 198.

In gleichen Entfernungen vom Mittelpunkte sind alle Kugelschnitte einander gleich; in ungleichen Entfernungen aber ist der dem Mittelpunkte nähere gröſſer, als der entferntere, und der durch den Mittelpunkt der gröſseste. Fig. 167.

Sind CD, CE, die Entfernungen zweyer Kugelschnitte AB, FG; folglich Perpendikel; so ist $DA^q = CA^q - CD^q$, und $EF^q = CF^q - CE^q$. Nun ist $CA^q = CF^q$. Folglich ist $DA^q = EF^q$, wenn $CD = CE$; und $DA^q > EF^q$, wenn $CD < CE$ ist. Demnach muß der Schnitt durch den Mittelpunkt der gröſseste Cirkel seyn.

Zusatz. 1. Zwey gleiche Kugelschnitte AB, FG, haben gleiche Entfernungen CD, CE.

2. Von zwey ungleichen Kugelschnitten AB, FG, ist die Entfernung des gröſsern, CD, kleiner, als des kleinern CE.

3. Ist ein Kugelschnitt ein gröſster Cirkel: so geht er durch den Mittelpunkt der Kugel, weil es sonst noch einen gröſsern Cirkel geben müßte.

4. Eine gerade Linie CD von dem Mittelpunkte der Kugel nach dem Mittelpunkte des Schnitts AB, ist senkrecht auf dem Schnitte, weil sonst ein Perpendikel aus dem Mittelpunkte der Kugel den Mittelpunkt des Schnitts nicht träfe, welches §. 197. unmöglich ist.

5. Eine gerade Linie, welche man auf einem Kugelschnitte AB, in seinem Mittelpunkt D, senkrecht errichtet, gehet durch den Mittelpunkt der Kugel C, weil sonst noch ein Perpendikel in D stünde, welches §. 167. unmöglich ist.

§. 199.

Digitized by Google

§. 199.

Ein Durchmesser der Kugel, welcher auf einem Kugelschnitte senkrecht ist, und daher durch des Schnitts Mittelpunkt gehet, heißt die zu solchem Kugelschnitte gehörige Axe, und ist §. 168. auf allen übrigen mit jenem parallelen Schnitten senkrecht, gehet folglich §. 197. durch die Mittelpunkte aller dieser Parallelcirkel. Die Endpunkte solcher Axe in der Oberfläche der Kugel, heißen die Pole aller der ihr zugehörigen Parallelcirkel. Drehet sich die Kugel um diese Axe: so beschreibt jeder Punkt ihrer Oberfläche einen zu solcher Axe gehörigen Parallelcirkel. Eine Ebene berührt die Kugel, wenn sie zwar ihre Oberfläche trift, aber ganz außerhalb der Kugel liegt, folglich die Kugel nur in einem Punkte berührt.

§. 200.

Reguläre Körper heißen solche, welche von gleichen regulären geradlinichten Figuren begrenzt werden; namentlich das Tetraëder von vier Triangeln; das Hexaëder, oder der Würfel von sechs Quadraten; das Oktaëder von acht Triangeln; das Dodekaëder von zwölf Pentagonen; das Ikosaëder von zwanzig Triangeln.

Zusatz. Außer diesen fünf Körpern ist keiner regulär. Denn aus drey gleichseitigen Triangeln entsteht der körperliche Winkel des Tetraëders, aus vieren des Oktaëders, aus fünfen des Ikosaëders, aus sechs oder mehrern entsteht kein körperlicher Winkel, weil ein Winkel des gleichseitigen Triangels $= \frac{2}{3}$ R, folglich sechs solche Winkel $= 4$ R. welches §. 177. unmöglich ist. Aus drey Quadraten entsteht der körperliche Winkel des Hexaëders, aber aus vier oder mehrern Quadraten entsteht §. 177. kein körperlicher Winkel. Aus drey regulären Pentagonen

entsteht der körperliche Winkel des Dodekaëders, aber aus vier oder mehrern entsteht kein körperlicher Winkel, weil ein Winkel des regulären Pentagons $= 1\frac{1}{5}$ R. folglich vier solche Winkel > 4 R. welches §. 177. unmöglich ist. Aus andern Polygonen ist es noch weniger möglich einen körperlichen Winkel zu machen.

Anmerkung. Die Alten haben die Theorie der regulären Körper mit großem Scharfsinn aus einander gesetzt; nur kann man sich von ihrer Anwendung wohl keinen besondern Nutzen versprechen.

Zwey-

Digitized by Google

Zweyter Abschnitt.

Die gemischte Geometrie.

1. Von der Ausmessung der Größen.
2. Von der Berechnung ebener Triangel; oder die ebene Trigonometrie.
3. Von der Berechnung körperlicher Triangel, oder die sphärische Trigonometrie.

Erstes Kapitel.

Von der Ausmessung der Größen.

I. Ausmessung der Linien und Winkel.

§. 1.

Eine Größe, welche man als bekannt und gegeben annimmt, und womit man andere Größen derselben Art vergleicht, um die Verhältniß derselben gegen solche Größe, als gegen die Einheit, durch eine Zahl auszudrücken, heißt ein Maaß. Das Maaß gerader Linien ist eine gerade Linie, wozu man die Länge eines Fußes, die aber selbst wieder sehr verschieden ist, und verschiedentlich eingetheilt wird, angenommen hat. Nach dem geometrischen oder Decimalmaaße wird der Fuß in 10 Zoll, der Zoll in 10 Linien, die Linie in 10 Scrupel eingetheilt; so wie 10 Fuß eine Ruthe ausmachen. Die Zeichen für Ruthe, Fuß, Zoll, Linien, Scrupel sind: $^{\circ}$ $'$ $''$ $'''$ ^{IV}. Beym Rheinländischen, oder Duode-

Digitized by Google

timal, oder Werkmaaße, finden eben die Benennungen und Zeichen statt; nur daß die Eintheilung durch die Zahl 12 geschiehet. Zum Unterschiede kann man auch dieses durch kleine, und jenes durch große Buchstaben bezeichnen.

Z. E. $8^{\circ}\,4'\,5''\,3'''\,7^{IV}$; oder 8 R, 4 F, 5 Z, 3 L, 7 S; oder 8 r, 4 f, 5 z, 3 l, 7 ſ, heißt 8 Ruthen, 4 Fuß, 5 Zoll, 3 Linien, 7 Scrupel, Duodecimalmaaß, oder Decimalmaaß, oder beydes, je nachdem kleine, oder große Buchstaben, oder Zeichen gebraucht sind.

Zusatz. 1. Bey dem Decimalmaaße hat man noch die Bequemlichkeit, daß man dasselbe auch nach Art der Decimalzahlen bezeichnen kann; weil hiernach $1' = \frac{1}{10}{}^{\circ}$, $1'' = \frac{1}{100}{}^{\circ}$ u. s. w. ist. So kann z. E. das obige Beyspiel auch ausgedrückt werden: 8,4537° oder 84,537′ oder 845,37″ u. s. w.

2. Eine französische Ruthe, oder eine Toise ist $= 6'$, $1' = 12''$, $1'' = 12'''$, $1''' = 10^{IV}$; wornach also der Pariser Fuß in 1440 gleiche Theile oder Scrupel getheilt wird.

§. 2.

Aufgabe: Wenn die Verhältniß zweyer Fußmaaße, A : B, gegeben ist, jede Anzahl Fuße n, nach dem einen Maaße, dessen Verhältnißzahl A ist, in die zugehörige Anzahl Fuße x, nach dem andern Maaße, dessen Verhältnißzahl B ist, zu verwandeln.

Hier ist offenbar $B : A = n : x$; folglich $\log. x = \log. n \mp \log. \frac{A}{B}$; in welchet Formel das positive Zeichen gilt, wenn $A > B$; das negative aber, wenn $A < B$ ist.

Z. E. Wenn der Pariser Fuß zum Rheinländischen wie 14400 : 13913, das ist, wenn 14400′ Rheinl. = 13913′ Paris. und man soll 1080 Pariser Fuß in Rheinländi-

Digitized by Google

ländische verwandeln: so setzt man, 13913 Par. Fuß geben 14400 Rheinländ. Fuß, was geben 1080 Pariser Fuß? oder

$$13913 : 14400 = 1080 : x$$

folglich $\log. x = \log. 1080 + \log. \frac{14400}{13913}$.

§. 3.

Aufgabe: Das geometrische Längenmaaß in das Werkmaaß zu verwandeln.

Da es hier nur auf die verschiedene Eintheilung in 10 oder 12 Theile ankommt: so nimmt man dabey den Fuß von gleicher Größe an, so daß

1 Fuß = 10 Z. = 12 z.
1 Fuß = 100 L. = 144 l.
1 Fuß = 1000 S. = 1728 ſ.

Demnach ist

1) $10\,Z = 12\,z$, folglich $Z = \frac{12}{10}z = z + \frac{2}{10}z$. Nun ist $z = 12\,l$, und daher $\frac{2}{10}z = \frac{24}{10}l = 2\,l + \frac{4}{10}l$. Folglich ist $Z = z + 2\,l + \frac{4}{10}l$. Nun ist $l = 12\,ſ$, und daher $\frac{4}{10}l = \frac{48}{10}ſ = 4,8\,ſ$. Folglich ist $Z = z + 2\,l + 4,8\,ſ$.

2) $100\,L = 144\,l$, folglich $L = \frac{144}{100}l = l + \frac{44}{100}l$. Nun ist $l = 12\,ſ$, und daher $\frac{44}{100}l = \frac{528}{100}ſ = 5,28\,ſ$. Folglich ist $L = l + 5,28\,ſ$.

3) $1000\,S = 1728\,ſ$, folglich $S = \frac{1728}{1000}ſ = 1,728\,ſ$.

Sollte man hiernach z. E. 9 Z, 8 L, 4 S auf Duodecimalmaaß bringen: so ist

$9\,Z =$	$(z + 2\,l + 4,8\,ſ)\,9 =$	$10\,z + 9\,l + 7,2\,ſ$
$8\,L =$	$(l + 5,28\,ſ)\,8 =$	$11\,l + 6,24\,ſ$
$4\,S =$	$(1,728\,ſ)\,4 =$	$6,912\,ſ$
$9\,Z + 8\,L + 4\,S =$		$11\,z + 9\,l + 8,352\,ſ$

Digitized by Google

§. 4.

Aufgabe: Das Längenwerkmaaß in das geometrische zu verwandeln.

Nach §. 3. ist

1) 12 z = 10 Z; folglich z = $\frac{10}{12}$ Z = 0,833″
2) 144 l = 100 L; folglich l = $\frac{100}{144}$ L = 0,69‴ = 0,069″
3) 1728 ſ = 1000 S: folglich ſ = $\frac{1000}{1728}$ S = 0,57^{IV} = 0,0057″

Sollte man hiernach z. E. 8 z, 3 l, 5 ſ, auf Decimalmaaß bringen: so ist

8 z = (0,833″) . 8 = 6,664″
3 l = (0,069″) . 3 = 0,207″
5 ſ = (0,0057″) . 5 = 0,028″

8z + 3l + 5ſ = 6,959″ = 6 Z + 9 L + 5,9 S.

Zusatz. 1. Bey beyden Aufgaben ist der Fuß von gleicher Größe angenommen worden. Sollte aber die Ruthe gleiche Größe haben: so gelten doch obige Formeln, wenn man darinnen setzt F und f, statt Z und z; Z und z, statt L und l; L und l, statt S und ſ.

2. Auch siehet man leicht ein, wie ein Maaß in ein andres zu verwandeln ist, wenn beyde nicht nur in Absicht der Größe, sondern auch in Absicht der Eintheilungsart verschieden sind. Z. E. man sollte 5,12′ Rheinländisch in londner Duodecimalmaaß verwandeln: so sind §. 2. 5,12′ Rheinl. = 5,253′ londner. Letztre geben §. 3. 5′ 3″ 0‴ 5^{IV} Duodecimalmaaß.

§. 5.

Aufgabe: Einen verjüngten Maasstab zu verfertigen. Fig. 168.

Man nehme willkürlich eine gerade Linie AB, theile solche in gleiche Theile z. E. 4; errichte auf derselben in A einen Perpendikel AC von beliebiger Länge, theile ihn in

in eben so viel gleiche Theile, und ziehe durch die Theilpunkte Parallellinien mit AB. Ferner mache man BD senkrecht, ziehe ED, und mit ihr Parallelen durch die übrigen Theilpunkte: so ist BE : AB = 1 : 4, und im △DEB, III. §. 116.

DH : DB = PH : EB = 1 : 4.
DK : DB = NK : EB = 2 : 4.
DL : DB = LM : EB = 3 : 4.

Zusatz. 1. Auf die Art siehet man leicht, wenn die Eintheilung in 10 oder 12 Theile geschiehet, wie man hiedurch einen geometrischen oder Werkfuß in Zolle, und die Zolle in Linien eintheilen könne.

2. Durch Hülfe des verjüngten Maaßstabes lassen sich mit geraden Linien alle arithmetische Operationen vornehmen; wozu auch die sogenannte arithmetische Linie des Proportionalcirkels dient.

3. Statt des verjüngten Maaßstabes, oder der Eintheilung durch Transversallinien, giebt es noch eine andre vorzügliche Methode, welche nach ihren Erfindern der Nonius (Nunney) oder Vernier (Werner) heißt.

§. 6.

Aufgabe: Einen Nonius oder Vernier für das Längenmaaß zu verfertigen. Fig. 169.

Es sey AB = CD, und die erste in 5, die andere in 4 gleiche Theile getheilt. Jeder Theil der AB heiße a, jeder Theil der CD heiße b: so ist 4 b = 5 a, folglich $b = \frac{5}{4}a = a + \frac{1}{4}a$, das ist, b um $\frac{1}{4}$ größer als a. Demnach ist

DK — BE = b — a = $\frac{1}{4}$.a
DL — BF = 2 (b — a) = $\frac{2}{4}$a
DM — BG = 3 (b — a) = $\frac{3}{4}$a.

Eben das gilt auch rückwärts von A nach B zu.

Setzt man in AB, statt 5, die Zahl der Theile n: so ist in CD die Zahl der Theile n — 1, und CD der Nonius oder Vernier, worinn jeder Theil um $\frac{1}{n-1}$ gröfser ist, als $\frac{1}{n}$ AB.

§. 7.

Das Maaß eines Winkels in ein Winkel. Man erwählt dazu den rechten Winkel, theilt ihn in 90 gleiche Theile, welche man nach Belieben weiter eintheilen kann, und bestimmt hiedurch die Verhältniß der Winkel. Da sich aber in gleichen Cirkeln III. §. 141. die Bogen wie die Winkel verhalten; so läßt sich die Verhältniß der Winkel auch durch die Verhältniß der Bogen bestimmen, und man kann in solcher Beziehung die Cirkelbogen als ein Maaß der Winkel ansehen. Hiezu theilt man die Peripherie des Cirkels in 360, folglich den vierten Theil der Peripherie, oder einen Quadranten, in 90 gleiche Theile, welche man Grade nennt. Jeder Grad wird in 60 Minuten; jede Minute in 60 Secunden; jede Secunde in 60 Tertien u. s. w. getheilt. Die Zeichen der Grade, Minuten, Secunden, Tertien, sind $^\circ\ '\ ''\ '''$.

Zusatz. 1. Es ist willkürlich mit welchem Halbmesser der Cirkel gezogen sey.

2. Ein Instrument, welches einen halben Cirkel in seine Grade eingetheilt enthält, heißt ein Transporteur.

3. Für Cirkelbogen hat man auch einen Vernier oder Nonius auf ähnliche Art, wie für gerade Linien.

§. 8.

Digitized by Google

§. 8.

Ist n die Anzahl der Seiten eines regulären Polygons: so ist der Centriwinkel $= \frac{4\,R}{n}$, und der Polygonwinkel $= \frac{2\,n\,R - 4\,R}{n} = 2\,R - \frac{4\,R}{n}$; folglich jeder das Complement des andern zu zwey rechten Winkeln.

Beschreibt man um das Polygon einen Cirkel; und ziehet vom Mittelpunkte gerade Linien nach den Polygonspitzen: so wird das Polygon in n gleiche Triangel getheilt, und jeder Polygonwinkel halbirt, auch sind alle Centriwinkel einander gleich. Diese aber sind zusammen $= 4\,R$, folglich jeder $= \frac{4\,R}{n}$. In jedem Triangel sind die Winkel $= 2\,R$, folglich die Winkel in allen diesen Triangeln $= 2\,n\,R$, folglich die Polygonwinkel $= 2\,n\,R - 4\,R$, folglich jeder $\frac{2\,n\,R - 4\,R}{n} = 2\,R - \frac{4\,R}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.

II. Ausmessung der Flächen.

§. 9.

Das Maaß einer Fläche ist eine Fläche. Man erwählt hiezu das Quadrat, und nennt es Quadratruthe, Quadratfuß, Quadratzoll u. s. w. je nachdem seine Seite eine Ruthe, oder einen Fuß, oder einen Zoll lang ist. Jedes dieser Quadrate wird entweder in 100, oder in 144 gleiche Theile getheilt, je nachdem seine Seite entweder in 10 oder in 12 gleiche Theile getheilt ist. Fig. 170.

Digitized by Google

Ein Quadrat AC, dessen Seite = 5, indem die Seite des Quadrats AE = 1 ist, würde offenbar 5 . 5 oder 25 solcher Quadrate, als AE ist, enthalten; weil III. §. 136. Zus. 1. $AE : AC = AF^2 : AB^2 = 1^2 : 5^2 = 1 : 25$. Folglich würde ein Quadrat, dessen Seite = 10 ist, 100; und ein Quadrat, dessen Seite = 12 ist, 144 solcher kleinen Quadrate enthalten.

Zusatz. Die Bequemlichkeit des Decimallängenmaaßes §. 1. Zus. 1. findet auch beym Quadratmaaße statt. Denn da $1\ F^2 = \frac{1}{100}\ R^2$, $1\ Z^2 = \frac{1}{10000}\ R^2$ u. s. w. ist: so kann man statt 37° 24′ 36″ 45‴ auch schreiben 37,243645° oder 3724,3645′, oder 372436,45″ u. s. w.

§. 10.

Aufgabe: Wenn die Verhältniß zweyer Quadratfuße, $A^2 : B^2$, gegeben ist, jede Anzahl Quadratfuße n, nach dem ersten Maaße in die zugehörige Zahl x, nach dem andern Maaße, zu verwandeln.

Hier ist offenbar $B^2 : A^2 = n : x$, folglich $\log. x = \log. n \mp 2 \log. \frac{A}{B}$. Z. E. 1000 Pariser Quadratfuße, wie viel Rheinländische? wo $\log. x = \log. 1000 + 2 \log. \frac{144}{139}$.

§. 11.

Aufgabe: Das geometrische Quadratmaaß in das Werkmaaß zu verwandeln.

Nimmt man hier wiederum den Fuß von gleicher Größe an: so ist

1 Quadratfuß = 100 Z^2 = 144 z^2
1 Quadratfuß = 10000 L^2 = 20736 l^2
1 Quadratfuß = 1000000 S^2 = 2985984 $\int^2$.

Dem-

Digitized by Google

Demnach ist

1) $100\,Z^2 = 144\,z^2$, folglich $Z^2 = \frac{144}{100}\,z^2 = z^2 + \frac{44}{100}\,z^2$. Nun ist $z^2 = 144\,l^2$, und daher $\frac{40}{100}\,z^2 = \frac{6336}{100}\,l^2 = 63\,l^2 + \frac{36}{100}\,l^2$. Folglich ist $Z^2 = z^2 + 63\,l^2 + \frac{36}{100}\,l^2$. Nun ist $l^2 = 144\,f^2$, und daher $\frac{36}{100}\,l^2 = \frac{5184}{100}\,f^2 = 51{,}84\,f^2$. Folglich ist $Z^2 = z^2 + 63\,l^2 + 51{,}84\,f^2$.

2) $10000\,L^2 = 20736\,l^2$, folglich $L^2 = \frac{20736}{10000}\,l^2 = 2\,l^2 + \frac{736}{10000}\,l^2$. Nun ist $l^2 = 144\,f^2$, und daher $\frac{736}{10000}\,l^2 = \frac{105984}{10000}\,f^2 = 10{,}5984\,f^2$. Folglich ist $L^2 = 2\,l^2 + 10{,}5984\,f^2$.

3) $1000000\,S^2 = 2985984\,f^2$, folglich $S^2 = 2{,}985984\,f^2$.

Sollte man hiernach $4\,Z^2 + 9\,L^2 + 20\,S^2$ auf Duodecimalmaaß bringen: so ist

$4Z^2 = (z^2 + 63\,l^2 + 51{,}84\,f^2).4 = 4z^2 + 252\,l^2 + 207{,}36\,f^2$
$9L^2 = (2\,l^2 + 10{,}5984\,f^2).9 = 18\,l^2 + 95{,}38\,f^2$
$20S^2 = (2{,}985984\,f^2).20 = 59{,}71\,f^2$

$4Z^2 + 9L^2 + 20S^2 = 4z^2 + 270\,l^2 + 362{,}41\,f^2$

welches, gehörig reducirt, $= 5\,z^2 + 128\,l^2 + 74{,}41\,f^2$.

§. 12.

Aufgabe: Das quadratische Werkmaaß in das geometrische zu verwandeln.

Nach §. 11 ist

1) $144\,z^2 = 100\,Z^2$, folglich $z^2 = \frac{100}{144}\,Z^2 = 0{,}694444''$

2) $20736\,l^2 = 10000\,L^2$, folglich $l^2 = \frac{10000}{20736}\,L^2 = 0{,}48\ldots''' = 0{,}0048\ldots''$

3) $2985984\,f^2 = 1000000\,S^2$ folglich $f^2 = \frac{1000000}{2985984}\,S^2 = 0{,}33^{IV} = 0{,}000033''$.

Hiernach ist die Verwandelung leicht geschehen.

Zusatz.

Digitized by Google

Zusatz. §. 4. Zus. ingleichen §. 5. läßt sich auch auf das Quadratmaaß anwenden.

§. 13.

Aufgabe: Jedes Parallelogramm auszumessen.

Wenn Q das Quadratmaaß, dessen Seite = 1, des Parallelogramms P Grundlinie = b und Höhe = a: so ist III. §. 140. Q : P = 1 : ab. Nun ist Q = 1. Folglich ist P = ab.

Zusatz. 1. Aus P = ab folgt 1 : a = b : P, desgleichen $\frac{P}{b} = a$, und $\frac{P}{a} = b$.

2. Ist P ein Quadrat: so ist a = b, folglich $P = a^2$, folglich $\sqrt{P} = a$.

3. Ist der Inhalt eines andern Parallelogramms $\Pi = \alpha . \beta$: so ist $P : \Pi = ab : \alpha\beta$. Wäre nun $a = \alpha$: so wäre $P : \Pi = b : \beta$. Wäre $b = \beta$; so wäre $P : \Pi = a : \alpha$. Wäre $P = \Pi$: so wäre $ab = \alpha\beta$; folglich $a : \alpha = \beta : b$.

§. 14.

Aufgabe: Jeden Triangel auszumessen.

Da III. §. 49. Zus. 1. der Triangel T, die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie b, und Höhe a: so ist $T = \frac{a . b}{2} = \frac{a}{2} . b = \frac{b}{2} . a$.

Zusatz. 1. Aus $T = \frac{ab}{2}$ folgt $\frac{2T}{a} = b$, und $\frac{2T}{b} = a$.

2. In einem rechtwinklichten Triangel sey die Hypothenuse h, die Katheten a und b: so ist $h = \sqrt{a^2 + b^2}$, und $a = \sqrt{h^2 - b^2}$, auch $b = \sqrt{h^2 - a^2}$.

§. 15.

Digitized by Google

§. 15.

Aufgabe: Jede geradlinichte Figur auszumessen.

Man theile die Figur durch Diagonalen in Triangel, messe solche und bringe sie in eine Summe.

§. 16.

Aufgabe: Jede geradlinichte Figur in ein Quadrat zu verwandeln, oder zu quadriren.

Da jede geradlinichte Figur sich in ein Parallelogramm, und dieses in ein Rectangel verwandeln läßt: so sey dies geschehen, und der Inhalt des Rectangels = ab. Ist nun die Seite des gesuchten Quadrats x: so ist $ab = x^2$, folglich $a : x = x : b$, oder $x = \sqrt{ab}$.

§. 17.

Aufgabe: Jedes reguläre Polygon von n Seiten auszumessen, wenn die Polygonseite AB, und des um das Polygon beschriebenen Cirkels Halbmesser CA = 1, gegeben ist. Fig. 171.

Ziehet man von dem Mittelpunkte C, gerade Linien nach den Spitzen des Polygons: so wird dasselbe in n gleiche Triangel, wovon einer ACB ist, getheilt. Fället man von C auf AB den Perpendikel CE: so halbirt solcher AB in E, und ist die Höhe des △ACB. Nun ist $CE = \sqrt{CA^2 - AE^2} = \sqrt{(1 - \frac{1}{4} AB^2)}$. Folglich ist §. 14. $\triangle ACB = \frac{AB \cdot \sqrt{(1 - \frac{1}{4} AB^2)}}{2}$, folglich das Polygon $= \frac{n \cdot AB \cdot \sqrt{(1 - \frac{1}{4} AB^2)}}{2}$.

Zusatz. 1. Demnach ist ein solches Polygon einem Triangel gleich, dessen Grundlinie dem Perimeter des Polygons n . AB, und dessen Höhe dem Perpendikel vom Mit-

Digitized by Google

Mittelpunkte auf die Polygonseite, $CE = r(1 - \frac{1}{4} AB^2)$, gleich ist.

2. Aus dem Inhalte eines regulären Polygons für den Halbmesser 1, findet man leicht den Inhalt eines ähnlichen Polygons für den Halbmesser r; weil III. §. 144. jener zu diesem wie 1 zu r^2.

3. Aus dem Inhalte des innern Polygons findet man leicht den Inhalt des äußern; weil III. §. 145. jener zu diesen wie CE^2 zu $CA^2 = 1 - \frac{1}{4} AB^2 : 1$.

§. 18.

Aufgabe: Aus der gegebenen Seite AB, des in einem Cirkel beschriebenen regulären Polygons von n Seiten, und dem Halbmesser CA = 1, die Seite AD eines in demselben Cirkel beschriebenen regulären Polygons von 2 n Seiten zu finden. Fig. 171.

Da $AD^2 = AE^2 + ED^2$, und $AE = \frac{1}{2} AB$: so ist $AD^2 = \frac{1}{4} AB^2 + ED^2$. Nun ist $ED = CD - CE = 1 - CE$, und daher $ED^2 = 1 - 2\,CE + CE^2$. Folglich ist $AD^2 = \frac{1}{4} AB^2 + 1 - 2\,CE + CE^2$. Nun ist $CE^2 = AC^2 - AE^2 = 1 - \frac{1}{4} AB^2$, und daher $2\,CE = 2r(1 - \frac{1}{4} AB^2)$. Folglich ist $AD^2 = \frac{1}{4} AB^2 + 1 - 2r(1 - \frac{1}{4} AB^2) + 1 - \frac{1}{4} AB^2 = 2 - 2r(1 - \frac{1}{4} AB^2)$; folglich $AD = \sqrt{2 - 2r(1 - \frac{1}{4} AB^2)}$.

Wäre demnach AB die Seite einer sechsseitigen Figur = 1: so ist AD die Seite einer zwölfseitigen Figur $= \sqrt{(2 - 2r\frac{1}{4})} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{,}51763809$. Nimmt man nun AB für die Seite einer zwölfseitigen Figur: so findet man AD die Seite einer 24seitigen Figur. Auf die Art findet man ferner die Seite einer 48, 96, 192, 324, 768seitigen Figur und so weiter. Letztere ist = 0,0081811 und die Sehne eines Bogens von $28\frac{1}{8}$ Minute.

Zusatz.

Digitized by Google

Zusatz. Vervielfältigt man die gefundene Seite mit der Zahl der Polygonseiten: so hat man den Perimeter des innern Polygons, und hieraus den Perimeter des äußern, weil sich III. §. 145. jener zu diesem verhält, wie CE zu $CA = r(1 - \frac{1}{4} AB^2) : 1$.

§. 19.

Aufgabe: Die Länge der Cirkelperipherie für den Halbmesser 1, so genau als man will zu finden, oder den Cirkel zu rectificiren.

Da die Peripherie des Cirkels zwischen den Perimetern des innern und äußern Polygons: so berechne man §. 18. solche Perimeter als Grenzen für die Peripherie, welche desto näher zusammenrücken, je mehrmal man die Zahl der Polygonseiten verdoppelt.

So ist z. E. der Perimeter der innern sechsseitigen Figur = 6; der äußern = 6,9282038; folglich die Peripherie zwischen 6,0 und 6,9. Will man solche näher haben: so ist der Perimeter der innern 768seitigen Figur = 6,2830848, der äußern = 6,2831375; folglich die Peripherie zwischen 6,2830 und 6,2831. Setzte man daher für den Halbmesser 1 die Peripherie = 6,2830 oder für den Durchmesser 1 die Peripherie $\pi = 3{,}1415$: so würde der Fehler noch nicht $\frac{1}{10000}$ betragen, welchen man auch nach Belieben vermindern könnte, wenn man die Anzahl der Polygonseiten noch weiter verdoppelte. Auf diese mühsame Art fand Ludolph von Ceulen für den Durchmesser 1 die Peripherie

$\pi = 3{,}141592\ 653589\ 793238\ 462643\ 383879\ 50$

Anmerkung. Diese Ludolphische Zahl, welche bis auf 32 Decimalstellen gehet, hat Sherwin bis auf 72, Machin bis auf 120, und Lagny bis auf 127 erweitert. Aber schon die erste ist mehr als hinreichend,

und

Digitized by Google

und dient allen vorgeblichen Erfindungen der Cirkelquadratur zur Prüfung. So ist z. E. die Archimedische Zahl $\frac{22}{7} = 3{,}142\ldots$ welche schon bey der dritten Decimalstelle abweicht. Des Metius Zahl ist $\frac{355}{113} = 3{,}1415929$, welche erst bey der siebenten Decimalstelle abweicht.

Zusatz. 1. Demnach ist bey einem Cirkel, dessen Durchmesser d, und dessen Peripherie p heißt, $p : d = \pi : 1$, und eben so bey einem andern Cirkel $P : D = \pi : 1$; folglich $P : p = D : d = R : r$, das heißt, die Peripherien der Cirkel verhalten sich wie ihre Durchmesser, oder Halbmesser.

2. Aus dem Durchmesser eines Cirkels $2r = d$, findet man die Peripherie p, wenn man setzt $1 : \pi = 2r : p$, folglich $p = 2r \cdot \pi = d \cdot \pi$.

3. Aus $p = 2r\pi$ findet man $r = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2p} \cdot \frac{1}{\pi}$, da denn

$\frac{1}{\pi} = 0{,}318309\ 886183\ 790671\ 537767\ 926.$

4. Hieraus läßt sich auch die Länge eines jeden Cirkelbogens finden, wenn man setzt: 360 Grad zu der Gradzahl des Bogens, so die ganze Peripherie zu der Länge solches Bogens.

§. 20.

Aufgabe: Einen Cirkel, dessen Halbmesser r ist, auszumessen, oder zu quadriren.

Da §. 17. Zus. 1. das reguläre Polygon einem Triangel gleich ist, dessen Grundlinie dem Perimeter, und dessen Höhe dem Perpendikel vom Mittelpunkt auf die Polygonseite gleich ist: so ist der Cirkel einem Triangel gleich, dessen Grundlinie der Peripherie, und dessen Höhe dem Halbmesser des Cirkels gleich ist. Demnach ist der

Inhalt

Digitized by Google

Inhalt des Cirkels $a = \frac{p \cdot r}{2} = \frac{1}{2} p \cdot r$. Nun ist §. 19. Zus. 2. $p = 2 r \pi$, und daher $\frac{1}{2} p = r \pi$. Folglich ist $a = r^2 \pi = \frac{d^2 \pi}{4}$.

Zusatz. 1. Aus $a = r^2 \pi$ folgt $a : r^2 = \pi : 1$, und eben so $A : R^2 = \pi : 1$; folglich $A : a = R^2 : r^2 = D^2 : d^2$, das heißt, die Cirkelflächen verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser, oder Durchmesser.

2. Aus $a = r^2 \pi$ folgt $\frac{a}{\pi} = r^2$, folglich $r = \left(a \cdot \frac{1}{\pi}\right) = r$, wornach jede geradlinichte Figur, deren Inhalt $= a$, in einen Cirkel verwandelt werden kann. Auch lassen sich zwey Cirkel, deren Halbmesser R, r, in einen zusammenbringen, dessen Halbmesser $= (R^2 + r^2)$ seyn müßte.

3. Den Inhalt x, eines jeden Ausschnitts von n Grad findet man, wenn man setzt: $360 : n = r^2 \pi : x$, folglich $x = \frac{n}{360} \cdot r^2 \pi$.

4. Hieraus findet man den Abschnitt, dessen Grundlinie AB Fig. 171. wenn man den Δ ACB, dessen Höhe $= r - (r^2 - \frac{1}{4} AB^2)$ ist, von dem Ausschnitte subtrahirt.

5. Sind die Halbmesser R, r, zweyer concentrischen Cirkel gegeben; deren Inhalt also $R^2 \pi$ und $r^2 \pi$: so ist der Ring zwischen den beyderseitigen Peripherien $= R^2 \pi - r^2 \pi = (R^2 - r^2) \pi$.

6. Es sey Fig. 172. ACB ein rechtwinklichter gleichschenklichter Triangel. Aus C beschreibe man mit CA den Quadranten AEB; und aus F mit FA = FB den halben Cirkel ADB: so erhellet aus Zus. 2. daß der halbe Cirkel dem Quadranten, folglich, wenn man den Abschnitt AEB davon nimmt, die lunula Hippocratis ADBE = ΔACB sey.

Digitized by Google

III. Ausmessung der Körper.

§. 21.

Das Maaß eines Körpers ist ein Körper. Man erwählt hiezu einen Würfel oder Cubus, und nennt ihn Cubikruthe, Cubikfuß, Cubikzoll u. s. w. je nachdem seine Seite eine Ruthe, oder einen Fuß, oder einen Zoll lang ist. Jeder dieser Würfel, wird entweder in 1000, oder in 1728 gleiche Theile getheilt, je nachdem seine Seite in 10, oder in 12 gleiche Theile getheilt ist. Fig. 170.

Auf den Quadraten AC, AE, denke man sich Würfel: so würde offenbar der erste $25 . 5$ oder 125 solche Würfel als der zweyte ist, enthalten; weil III. §. 189. der zweyte zum ersten wie $AF^3 : AB^3 = 1 : 5^3 = 1 : 125$. Folglich würde ein Würfel, dessen Seite $= 10$ ist, 1000; und ein Würfel, dessen Seite $= 12$ ist, 1728 solcher kleinen Würfel enthalten.

Zusatz. Die Bequemlichkeit des Decimallängenmaaßes §. 1. Zus. 1. findet auch beym Körpermaaße statt. Denn da $1 F^3 = \frac{1}{1000} R^3$, $1 Z^3 = \frac{1}{1000000} R^3$ u. s. w. ist: so kann man statt $3° 425' 739'' 628'''$ auch setzen $3{,}425739628°$ oder $3425{,}739628$ oder $3425739{,}628''$ u. s. w.

§. 22.

Aufgabe: Wenn die Verhältniß zweyer Cubikfuße, $A^3 : B^3$, gegeben ist, jede Anzahl Cubikfuße n nach dem ersten Maaße, in die zugehörige Zahl x nach dem andern Maaße, zu verwandeln.

Hier ist offenbar $B^3 : A^3 = n : x$, folglich $\log. x = \log. n \mp 3 \log. \frac{A}{B}$. Z. E. 1000 Pariser Cubikfuße,

wie

Digitized by Google

wie viel Rheinländische? wo log. x = log. 1000 + 3 log. $\frac{144}{131}$.

§. 23.

Aufgabe: Das geometrische Cubikmaaß in das Werkmaaß zu verwandeln.

Nimmt man auch hier wiederum den Fuß von gleicher Größe an: so ist

1 Cubikfuß = 1000 Z^3 = 1728 z^3
1 Cubikfuß = 1000000 L^3 = 2985984 l^3

Demnach ist

1) 1000 Z^3 – 1728 z^3, folglich $Z^3 = z^3 + \frac{728}{1000} z^3$. Nun ist z^3 = 1728 l^3, und daher $\frac{728}{1000} z^3$ = 1257,984 l^3. Folglich ist $Z^3 = z^3$ + 1257,984 l^3.

2) 1000000 L^3 = 2985984 l^3. Folglich L^3 = 2,985984 l^3.

§. 24.

Aufgabe: Das Werkcubikmaaß in das geometrische zu verwandeln.

Nach §. 23. ist

1) 1728 z^3 = 1000 Z^3, folglich z^3 = 0,578‴
2) 2985984 l^3 = 1000000 L^3, folglich l^3 = 0,33‴ = 0,000033″.

Zusatz. §. 4. Zus. 1. desgleichen §. 5. gehört auch für das Cubikmaaß.

§. 25.

Aufgabe: Jedes Parallelepiped auszumessen.

Wenn C das Cubikmaaß, dessen Seite = 1, des Parallelepipeds P Grundfläche = bc, und Höhe = a: so ist III. §. 188. C : P = 1 : abc. Nun ist C = 1, folglich ist P = abc.

Digitized by Google

Zusatz. 1. Aus $P = abc$ folgt $\frac{P}{bc} = a$ und $\frac{P}{a} = bc$.

2. Ist P ein Würfel: so ist $a = b = c$, folglich $P = a^3$ und $\sqrt[3]{P} = a$.

3. Ist der Inhalt eines andern Parallelepipeds $\Pi = \alpha\beta\gamma$: so ist $P : \Pi = abc : \alpha\beta\gamma$. Ist nun $a = \alpha$, so ist $P : \Pi = bc : \beta\gamma$. Ist $bc = \beta\gamma$: so ist $P : \Pi = a : \alpha$. Ist $P = \Pi$: so ist $abc = \alpha\beta\gamma$; folglich $a : \alpha = \beta\gamma : bc$.

§. 26.

Aufgabe: Jedes Prisma auszumessen.

Das dreyseitige Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipeds von gleicher Grundfläche bc und Höhe a; folglich sein Inhalt $= \frac{abc}{2} = \frac{bc}{2} \cdot a = \frac{a}{2} \cdot bc$.

Ein vielseitiges Prisma läßt sich durch Diagonalebenen in dreyseitige theilen, daher sein Inhalt das Product der gemeinschaftlichen Höhe in die Summe der einzelnen Grundflächen, folglich in die ganze Grundfläche ist.

Zusatz. Aus $P = \frac{abc}{2}$ findet man $a = \frac{2P}{bc}$ und $bc = \frac{2P}{a}$.

§. 27.

Grundsatz. Körper von gleichen Höhen und Grundflächen, welche durchaus in einerley Höhe gleiche Durchschnitte geben, haben gleiche Ausdehnung an Höhe, und Weite, und sind demnach einander gleich.

§. 28.

Cylinder und prismatische Körper von gleichen Grundflächen und Höhen, sind einander gleich.

Denn jeder Durchschnitt eines solchen Körpers ist III. §. 191. der Grundfläche gleich. Nun ist die Grundfläche

fläche des einen der Grundfläche des andern gleich. Folglich ist auch jeder Durchschnitt des einen dem Durchschnitte des andern gleich. Nun haben sie auch einerley Höhe. Folglich ist §. 27. der eine Körper dem andern gleich.

Zusatz. Die Verhältnisse, welche von den prismatischen Körpern bewiesen worden, gelten also auch von den Cylindern. Demnach sind ähnliche Cylinder in cubischer Verhältniß der Durchmesser oder Halbmesser ihrer Grundflächen; und Cylinder von gleicher Höhe in quadratischer Verhältniß solcher Durchmesser.

§. 29.

Aufgabe: Jeden Cylinder auszumessen.

Die Höhe des Cylinders sey a, der Halbmesser der Grundfläche r: so ist §. 20. die Grundfläche $r^2\pi$, folglich §. 26. 28. der Inhalt des Cylinders $V = a \cdot r^2\pi = \frac{ad^2\pi}{4}$.

Zusatz. 1. Würde aus einem Cylinder, dessen Halbmesser R, ein Cylinder, dessen Halbmesser r ausgeschnitten: so wäre der Inhalt solcher cylindrischen Röhre $V = a \cdot R^2\pi - ar^2\pi = (R^2 - r^2)a\pi$; folglich $\frac{V}{(R^2 - r^2)\pi} = a$.

2. Der Inhalt eines andern Cylinders, dessen Höhe α und Halbmesser ϱ, sey Q: so ist $Q = \alpha \cdot \varrho^2\pi$; folglich $V : Q = ar^2\pi : \alpha\varrho^2\pi = ar^2 : \alpha\varrho^2$. Ist $a = \alpha$: so ist $V : Q = r^2 : \varrho^2$. Ist $r = \varrho$: so ist $V : Q = a : \alpha$. Ist $V = Q$: so ist $ar^2 = \alpha\varrho^2$, folglich $a : \alpha = \varrho^2 : r^2$.

3. In vorhergehender Proportion $V : Q = ar^2 : \alpha\varrho^2$, sey $\alpha = na$, und $\varrho = mr$: so ist $V : Q = ar^2 : nam^2r^2 = 1 : n \cdot m^2$; folglich $Q = nm^2 V$. Auf letzter Formel gründet sich die Verfertigung des cylindrischen Visirstabes.

Digitized by Google

§. 30.

Pyramiden und Kegel von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich.

Denn jeder Durchschnitt der Pyramide GK Fig. 165. verhält sich III. §. 193. zur Grundfläche BE und jeder Durchschnitt des Kegels FK Fig. 166. verhält sich III. §. 195. zur Grundfläche BD wie $AM^2 : AN^2$. Folglich, wenn die Höhen beyderseits gleich sind, ist BE : GK = BD : FK. Nun ist BE = BD. Folglich ist auch GK = FK. Folglich ist §. 27. die Pyramide ABE dem Kegel ABD gleich.

Auf eben die Art führte man den Beweiß, wenn ABD eine andre Pyramide von einer beliebigen Anzahl Seiten gewesen wäre.

§. 31.

Ein Prisma, oder Cylinder ist dreymal so groß, als eine Pyramide, oder ein Kegel von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

Es sey Fig. 173. das dreyseitige Prisma ABCDEF. Man ziehe die Diagonalen der Seitenflächen BD, EC, CD, für die dreyseitigen Pyramiden ABDC, DBEC, ECFD: so sind §. 30. die beyden ersten Pyramiden gleich, weil sie gleiche Grundflächen ABD, DBE, und einerley Spitze C haben; und eben so die beyden letzten einander gleich, weil sie gleiche Grundflächen ECF, CEB, und einerley Spitze D haben. Folglich ist auch die erste der letzten gleich, und demnach das Prisma in drey gleiche Pyramiden getheilt, folglich jede der dritte Theil des Prisma; folglich §. 28. 30. ein Kegel der dritte Theil des Cylinders von eben der Höhe und eben der Grundfläche.

Zusatz. 1. Wäre ein Prisma und eine Pyramide vielseitig: so könnten beyde in dreyseitig getheilt, oder auf drey-

Digitized by Google

dreyseitige gebracht werden. Demnach gilt der Satz allgemein.

2. Die Verhältnisse, welche von Prismen und Cylindern bewiesen worden, gelten also auch von Pyramiden und Kegeln.

§. 32.

Aufgabe. Jede Pyramide und jeden Kegel auszumessen.

Da §. 31. jene der dritte Theil des Prisma, und diese der dritte Theil des Cylinders ist: so ist §. 26. die Pyramide $= \frac{abc}{6}$, und §. 29. der Kegel $= \frac{ar^2\pi}{3}$.

Zusatz. Bey einer andern Pyramide wäre der Inhalt $= \frac{\alpha\beta\gamma}{6}$, und bey einem andern Kegel der Inhalt $= \frac{a\varrho^2\pi}{3}$; woraus sich leicht die nöthigen Folgerungen ziehen lassen.

§. 33.

Aufgabe. Einen abgekürzten geraden Kegel AH, auszumessen, wenn der Halbmesser der Grundfläche AC $= r$, nebst der Höhe CE $= a$, und dem Halbmesser DE $= \varrho$, des der Grundfläche parallelen Schnitts gegeben ist. Fig. 174.

Ziehet man DB der CE parallel: so ist AB $=$ AC $-$ DE, und DB $=$ CE. Nun ist III. §. 116. AB : BD $=$ AC : CF, oder $r - \varrho : a = r : x$. Folglich ist $x = \frac{ar}{r-\varrho}$. Folglich ist §. 32. der Kegel FAG $= \frac{r^2\pi}{3} \cdot \frac{ar}{r-\varrho} = \frac{r^3}{r-\varrho} \cdot \frac{a\pi}{3}$. Nun ist auch III. §. 118.

Digitized by Google

$AB : BD = DE : EF$, oder $r - \varrho : a = \varrho : \frac{a\varrho}{r-\varrho}$, und daher §. 32. der Kegel $FDH = \frac{\varrho^2\pi}{3} \cdot \frac{a\varrho}{r-\varrho} = \frac{\varrho^3}{r-\varrho} \cdot \frac{a\pi}{3}$.

Folglich ist $AH = FAG - FDH = \frac{r^3-\varrho^3}{r-\varrho} \cdot \frac{a\pi}{3}$.

Zusatz. Eine abgekürzte Pyramide läßt sich mit einem abgekürzten Kegel vergleichen, und eben so ausmessen.

§. 34.

Eine Halbkugel AFDGB, ist doppelt so groß, als ein Kegel von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Fig. 175.

Auf dem Cirkel $TK = AB$ sey ein Cylinder TL, dessen Höhe $OP = CD$, und woraus der Kegel HOL, als $\frac{1}{3}$ TL, geschnitten worden, so daß der übrige Körper $HTOKL = 2\,HOL$ ist. Durch diesen Körper gehe ein Schnitt MN, der Grundfläche parallel: so ist solcher Schnitt ein Ring zwischen den Cirkeln RS, MN, folglich §. 20. Zus. 5. $= (QM^2 - QR^2)\pi = (QM^2 - OQ^2)\pi$; weil $OP = CD = CA = PH$, und $OP : PH = OQ : QR$, folglich $OQ = QR$ ist.

Durch die Halbkugel gehe gleichfalls ein Schnitt FG, parallel mit der Grundfläche in der Höhe $CE = OQ$, und man ziehe CF: so ist §. 20. dieser Schnitt $= EF^2 \cdot \pi = (CF^2 - CE^2)\pi = (QM^2 - OQ^2)\pi$. Demnach sind beyde Schnitte einander gleich. Folglich ist §. 27. $AFDGB = HTOKL = 2\,HOL$.

Zusatz. Da $HOL = \frac{1}{3}$ TL: so ist $AFDGB = \frac{2}{3}$ TL. Demnach beträgt die Halbkugel $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, welcher mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat; folglich die ganze Kugel $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, dessen Grundfläche dem größten Cirkel, und dessen Höhe dem Durchmesser gleich ist.

§. 35.

Digitized by Google

§. 35.

Aufgabe. Jede Kugel auszumessen.

Es sey der Kugel Halbmesser r, so ist §. 29. ein Cylinder von eben dem Halbmesser und von doppelt so großer Höhe $= 2r^3\pi = \frac{d^3\pi}{4}$, folglich §. 34. die Kugel als $\frac{2}{3}$ eines solchen Cylinders $= \frac{4}{3} \cdot r^3\pi = S = \frac{d^3\pi}{6}$.

Zusatz. 1. Aus $S = \frac{4}{3} \cdot r^3\pi$ folgt $\frac{S}{\pi} \cdot \frac{3}{4} = r^3$, folglich $\sqrt[3]{\frac{3S}{4\pi}} = r$.

2. Der Inhalt einer andern Kugel, deren Halbmesser ϱ sey s: so ist $s = \frac{4}{3} \cdot \varrho^3\pi$; folglich $S : s = r^3 : \varrho^3$, das heißt, die Kugeln sind in cubischer Verhältniß ihrer Halbmesser, oder Durchmesser.

3. Der Halbmesser einer Kugel S sey r, einer Kugel nS sey ϱ: so ist $S : nS = r^3 : \varrho^3$, folglich $\varrho^3 = \frac{nS \cdot r^3}{S} = n \cdot r^3$, folglich $\varrho = r \cdot \sqrt[3]{n}$; worauf sich die Verfertigung des Kaliberstabes in der Artillerie gründet.

§. 36.

Aufgabe: Die Körper in einander zu verwandeln.

Man vergleiche die gefundenen Formeln solcher Körper mit einander, und suche daraus die verlangten Bestimmungen. Z. E.

1) Ein Kegel, dessen Halbmesser r, und Höhe a, soll in einen Cylinder, dessen Höhe α vorgeschrieben ist, verwandelt werden: man sucht dessen Halbmesser ϱ.

Digitized by Google

Da §. 32. der Kegel $= \frac{ar^2\pi}{3}$ und §. 29. der Cylinder $\alpha\varrho^2\pi$: so ist $\frac{ar^2\pi}{3} = \alpha\varrho^2\pi$, folglich $\frac{ar^2}{3\alpha} = \varrho^2$, folglich $r\sqrt{\frac{a}{3\alpha}} = \varrho$.

2) Ein Cylinder $ar^2\pi$ soll in eine Kugel, deren Halbmesser ϱ man sucht, verwandelt werden.

Da §. 35. die Kugel $\frac{4}{3}\varrho^3\pi$ ist: so ist hier $ar^2\pi = \frac{4}{3}\varrho^3\pi$, folglich $\frac{3}{4} \cdot ar^2 = \varrho^3$, folglich $\sqrt[3]{\frac{3ar^2}{4}} = \varrho$.

3) Die Seite eines Würfels x zu finden, welcher einen andern Würfel, dessen Seite a, nmal enthält.

Hier ist $na^3 = x^3$ folglich $a\sqrt[3]{n} = x$.

Zusatz. Auf diese Art kann man auch jeden Körper in einen Würfel verwandeln oder cubiren.

§. 37.

Die krumme Oberfläche eines geraden Cylinders AC, ist einem Rectangel EG, gleich, dessen Höhe der Höhe des Cylinders, und dessen Grundlinie der Peripherie der Grundfläche gleich ist. Fig. 176.

Legt man die Seitenlinie BC des Cylinders an die gleich große Höhe des Rectangels EF: so läßt sich der Cylinder in das Rectangel einwickeln, und wird solches die cylindrische Oberfläche decken, wenn die Grundlinie EH der Peripherie der Grundfläche BA gleich ist.

Zusatz. Die cylindrische Oberfläche ist also einem Cirkel gleich, dessen Halbmesser ϱ, die mittlere Proportionallinie zu des Cylinders Höhe a, und Durchmesser 2r, ist. Denn es ist $\varrho^2\pi = 2ar\pi$, oder $\varrho^2 = 2ar$, folglich $a : \varrho = \varrho : 2r$.

§. 38.

Digitized by Google

§. 38.

Die krumme Oberfläche eines geraden Kegels ABC ist einem Triangel gleich, dessen Höhe der Seitenlinie des Kegels, und dessen Grundlinie der Peripherie der Grundfläche gleich ist. Fig. 177.

Man zeichne mit DE = AC, den Ausschnitt DEF so, daß der Bogen EF der Peripherie der Grundfläche BC gleich sey. Legt man nun die Seitenlinie des Kegels AC an DE: so läßt sich der Kegel in den Ausschnitt einwickeln, so daß solcher die Oberfläche des Kegels deckt. Solcher Ausschnitt aber ist §. 20. einem Triangel gleich, dessen Grundlinie dem Bogen, und dessen Höhe dem Halbmesser des Bogens gleich ist.

Zusatz. 1. Die conische Oberfläche ist also einem Cirkel gleich, dessen Halbmesser ϱ die mittlere Proportionallinie zu des Cylinders Seite a, und Halbmesser r, ist. Denn es ist $\varrho^2\pi = ra\pi$, oder $\varrho = \sqrt{ra}$, folglich $a : \varrho = \varrho : r$. (Denn die Peripherie der Grundfläche ist $2r\pi$, folglich $DEF = 2r\pi \cdot \frac{a}{2} = ra\pi$.)

2. Die conische Oberfläche $ra\pi$, verhält sich zu der Grundfläche $r^2\pi$, wie die Seitenlinie des Kegels a, zum Halbmesser der Grundfläche r.

§. 39.

Die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß als ein größter Cirkel.

Man denke sich die Oberfläche in so kleine Cirkel getheilt, daß solche als Ebenen angesehen werden können. Auf diesen Cirkeln denke man sich gerade Kegel, deren gemeinschaftliche Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist: so ist die Summe dieser Kegel der Kugel gleich. Nun ist die Höhe dieser Kegel dem Halbmesser der Kugel, r, und

Digitized by Google

und ihre Grundflächen der Oberfläche der Kugel A gleich. Folglich ist der Inhalt dieser Kegel $= \frac{r \cdot A}{3}$. Nun ist der Inhalt der Kugel $= \frac{4}{3} r^3 \pi$. Folglich ist $\frac{rA}{3} = \frac{4r^3\pi}{3}$, folglich $A = 4 \cdot r^2\pi$.

Zusatz. Die Oberfläche der Kugel $4r^2\pi$ ist also der Oberfläche eines Cylinders gleich, dessen Grundfläche dem größten Cirkel $r^2\pi$, und dessen Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich ist. Denn §. 37. war die Oberfläche des Cylinders $= 2ar\pi$. Nun ist hier $a = 2r$. Folglich ist die Oberfläche des Cylinders $= 4r^2\pi =$ der Oberfläche der Kugel.

Digitized by Google

Zweytes Capitel.

Von der Berechnung ebener Triangel, oder die ebene Trigonometrie.

1. Natur der trigonometrischen Linien.

§. 40.

Ziehet man aus der Spitze eines Winkels ACB, mit einem beliebigen Halbmesser CB = CA, einen Cirkelbogen AB, zwischen die Schenkel des Winkels: so heißt der Perpendikel BD, welchen man von dem einen Endpunkte des Bogens B, auf den Schenkel des Winkels fället, der Sinus dieses Winkels oder Bogens; der Perpendikel AK aber, welchen man auf dem Schenkel des Winkels, in dem andern Endpunkte des Bogens A, errichtet, und welcher von dem verlängerten andern Schenkel des Winkels CK, abgeschnitten wird, die Tangente dieses Winkels oder Bogens; ferner das Stück des Schenkels zwischen beyden Perpendikeln, AD, der Sinus versus dieses Winkels oder Bogens; endlich der bis zur Tangente verlängerte andre Schenkel CK, die Secante dieses Winkels oder Bogens. Fig. 178.

Fig. 1. Nennet man den Winkel ACB, sowohl, als den Bogen AB, welcher für den Halbmesser CB = CA, das Maaß des Winkels ist, m: so ist BD = sin. m; AK = tang. m; AD = sin. vers. m; CK = sec. m.

2. Bey einem stumpfen Winkel ACF, dessen Maaß der Bogen AF ist, wäre demnach FG der Sinus; AL die

die Tangente; CL die Secante; AG der Sinus versus, des stumpfen Winkels oder seines Bogens.

3. Bey einem rechten Winkel ACE, dessen Maaß der Quadrant AE, wäre EC der Sinus; AC der Sinus versus; aber AK der CE parallel, folglich Tangente und Secante des rechten Winkels ohne Ende.

§. 41.

Ergänzen zwey Winkel, ACB, BCE, einander zu einem rechten Winkel: so heißt der Sinus des einen der Cosinus des andern; die Tangente des einen die Cotangente des andern; die Secante des einen die Cosecante des andern; der Sinus versus des einen der Cosinus versus des andern. Fig. 178.

Zusatz. 1. Nennet man die Winkel ACB, BCE, sowohl, als ihre Bogen AB, BE, m und n: so ist BM = sin. n = cos. m; EN = tang. n = cotang. m; CN = sec. n = cosec. m; EM = sin. vers. n = cos. vers. m.

2. Da BM = CD: so ist auch CD = cos. m. Nun ist AD = CA — CD, auch sey der Halbmesser CA = r. Folglich ist sin. vers. m = r — cos. m.

3. Da BD = CM: so ist auch CM = sin. m. Nun ist EM = CE — CM, und CE = r. Folglich ist cos. vers. m = r — sin. m.

§. 42.

Zu zwey Winkeln ACB, ACF, welche einander zu zwey rechten Winkeln ergänzen, gehören gleich große trigonometrische Linien, nur den Sinus versus ausgenommen. Fig. 178.

Da ACB + ACF = 2 R: so ist ACB = 2 R. — ACF. Nun ist FCH = 2 R — ACF. Folglich ist ACB = FCH = ACQ, folglich auch BCE = FCE.

Da

Digitized by Google

Da ACB = FCH, CDB = CGF, CB = CF: so ist III. §. 38. BD = FG; folglich sin. ACB = sin. ACF.

Da ACB = ACQ, CAK = CAL, CA = CA: so ist III. §. 38. AK = AL, und CK = CL; folglich tang. ACB = tang. ACF, und sec. ACB = sec. ACF.

Hingegen ist AD = sin. vers. ACB, von AG = sin. vers. ACF, um DG = 2 CD, das ist, um den doppelten Cosinus unterschieden.

Da §. 40. Zus. 2. FG = sin. ACF: so ist §. 41. MF = cos. ACF; EP = cot. ACF; EM = cos. vers. ACF, und daher cos. vers. ACB = cos. vers. ACF. Ferner, da BCE = FCE, CMB = CMF, CB = CF: so ist III. §. 38. MB = MF; folglich cos. ACB = cos. ACF. Endlich, da BCE = FCE, CEN = CEF, CE = CE: so ist III. §. 38. EN = EP, und CN = CP; folglich cot. ACB = cot. ACF, und cosec. ACB = cosec. ACF.

§. 43.

Wenn der spitze Winkel ACB, wächst: so wächst zugleich sein Sinus und Sinus versus, seine Tangente und Secante, so daß, wenn er sich dem rechten Winkel nähert, die beyden ersten Linien sich dem Halbmesser nähern, die beyden letzten aber über alle Grenzen wachsen. Wenn der stumpfe Winkel ACF, wächst: so nimmt sein Sinus, seine Tangente und Secante ab, aber der Sinus versus wächst bis zum doppelten Halbmesser. Beym rechten Winkel ACE, ist der Sinus und Sinus versus dem Halbmesser gleich, welcher daher der Sinus totus heißt; Tangente und Secante aber sind größer als jede gegebene Linie, oder unendlich groß. Fig. 178.

Zusatz. 1. Indem Sinus, Tangente, und Secante wachsen, müssen Cosinus, Cotangente und Cosecante abnehmen;

Digitized by Google

nehmen; und indem jene abnehmen, müssen diese wachsen. Auch gilt dies von dem Sinus versus und Cosinus versus, nur für den stumpfen Winkel ausgenommen, bei welchem der Cosinus versus zugleich mit dem Sinus versus wächst.

2. Wird der Sinus totus oder Halbmesser r = 1 gesetzt: so lassen sich alle übrige Sinus in Zahlen nicht anders, als durch Brüche ausdrücken.

§. 44.

Alle trigonometrische Linien von gleichen Namen, welche für einerley Winkel m, υ, aber nach verschiedenen Halbmessern CA, ca, oder R, r, gezogen sind, verhalten sich wie diese Halbmesser. Fig. 178. 179.

Da m = υ, so sind die Triangel wie BDC, bdc u. s. w. einander ähnlich; folglich

BD : bd = BC : bc.	oder sin. m : sin. υ = R : r.
AD : ad = AC : ac.	sin. vers. m : sin. vers. υ = R : r.
AK : ak = AC : ac.	tang. m : tang. υ = R : r.
CK : ck = AC : ac.	sec. m : sec. υ = R : r.
BM : bm = BC : bc.	cos. m : cos. υ = R : r.
EM : em = CE : ce.	cos. vers. m : cos. vers. υ = R : r.
EN : en = CE : ce.	cot. m : cot. υ = R : r.
CN : cn = CB : cb.	cosec. m : cosec. υ = R : r.

Zusatz. 1. Demnach behalten auch trigonometrische Linien von verschiednen Namen einerley Verhältniß, wenn sie gleich zu verschiednen Halbmessern, aber einerley Winkel, gehören. Denn es ist z. E. sin. m : sin. υ = tang. m : tang. υ, folglich sin. m : tang. m = sin. υ : tang. υ.

2. Ist eine trigonometrische Linie für den Halbmesser r gegeben: so kann man hieraus dieselbe für den Halbmesser R finden; und umgekehrt. Z. E. 1 : R = sin. υ : sin. m folg-

Digitized by Google

folglich sin. m = sin. v . R, oder R : 1 = sin. m : sin. v; folglich sin. $v = \frac{\text{sin. m}}{R}$.

§. 45.

Aufgabe: Alle trigonometrische Linien durch den Sinus zu bestimmen. Fig. 178.

1. Da BM = CD, und CD = $r(CB^2 - BD^2) = r(r^2 - \text{sin. m}^2)$: so ist cos. m = $r(r^2 - \text{sin. m}^2)$

2. Da AD = AC — CD: so ist sin. vers. m = 1 — cos. m. Da AG = AC + CG = r + cos. m: so ist sin. vers. (180° — m) = r + cos. m.

3. Da CD : DB = CA : AK: so ist cos. m : sin. m = r : tang. m; folglich tang. $m = \frac{r \cdot \text{sin. m}}{\text{cos. m}}$.

4. Da CD : CA = CB : CK: so ist cos. m : r = r : sec. m; folglich sec. $m = \frac{r^2}{\text{cos. m}}$. Oder da CK = $r(CA^2 + AK^2)$: so ist auch sec. m = $r(r^2 + \text{tang. m}^2)$.

5. Da EM = CE — CM, und CM = DB, folglich EM = CE — DB: so ist cos. vers. m = 1 — sin. m.

6. Da CM : MB = CE : EN, und CM = BD: so ist sin. m : cos. m = r : cot. m; folglich cot. $m = \frac{r \cdot \text{cos. m}}{\text{sin. m}}$. Oder, da $\triangle$ ACK $\sim$ $\triangle$ CEN, folglich AK : AC = EC : EN; so ist tang. m : r = r : cot. m; folglich auch cot. $m = \frac{r^2}{\text{tang. m}}$.

7. Da CM : CE = CB : CN, und CM = BD: so ist sin. m : r = r : cosec. m; folglich cosec. $m = \frac{r^2}{\text{sin. m}}$. Oder, da CN = $r(CE^2 + EN^2)$: so ist auch cosec. m = $r(r^2 + \text{cot. m}^2)$.

Digitized by Google

Zusatz. 1. Da sin. tot. = r; alle übrigen Sinus aber kleiner: so sind, wenn man r = 1 setzt, alle Sinus, außer dem Sinus totus, < 1, folglich eigentliche Brüche.

2. Ist ACB = 45°: so ist auch AKC = 45°, folglich AK = AC, folglich tang. 45° = r = 1, und daher alle Tangenten unter 45° < 1, folglich eigentliche Brüche.

3. Nimmt ACB immerfort ab, so daß der Punkt B sich dem Punkte A immer mehr nähert, und endlich auf A fällt, folglich der Winkel 0 wird: so wird Sinus, Sinus versus, und Tangente 0, aber die Secante dem Halbmesser CA gleich.

§. 46.

Der Sinus BD eines Winkels ACB, ist die Hälfte der Sehne BQ, des doppelten Winkels BCQ. Fig. 178.

Da CD senkrecht auf BQ, auch CBD = CQD, und CD = CD: so ist III. §. 38. BD = DQ.

Zusatz. 1. Da III. §. 107. Zus. die Sehne von 60° dem Halbmesser r gleich ist: so ist sin. 30° = $\frac{1}{2}$ r.

2. Auch ist hieraus wenigstens im allgemeinen begreiflich, wie man die Sinustafeln dadurch hat berechnen können, daß man die Sehnen berechnete; und wie man aus solchen nach §. 45. alle übrige trigonometrische Linien berechnen konnte. Für die gefundenen Zahlen war es alsdenn nach II. §. 119. auch möglich, die zugehörigen Logarithmen zu finden. Die Einrichtung solcher trigonometrischen Tafeln, welche man in den im ersten Buche angeführten Sammlungen mathematischer Tafeln noch bequemer abgefaßt findet, fällt beym Anblick in die Augen; nur muß man wissen, daß der Halbmesser, oder Sinus totus, nicht = 1, sondern bey Berechnung der Logarithmen = 10 000 000 000 = R angenommen worden,

Digitized by Google

ben, daher der Logarithmus des Sinus totus = 10 ist. In den gemeinen oder kleinern Tafeln sind aber von den berechneten 10 Ziffern nur 7 mitgetheilt, also der Sinus totus = 10 000 000 = r gesetzt worden, doch hat man bey den Logarithmen die Charakteristik 10 beybehalten. Demnach setzt man nach §. 44. 1 : r = sin. m : sin. tab. m, und r : 1 = sin. tab. m : sin. m; und so auch bey den übrigen Linien, wobey sin. m den Sinus dieses Winkels für den Halbmesser 1; aber sin. tab. m den Sinus dieses Winkels in den Tafeln für den Halbmesser R oder r bedeutet.

3. In den Tafeln findet man die trigonometrischen Linien unmittelbar für alle spitze Winkel, auch für stumpfe Winkel, wenn man ihren Ergänzungswinkel zu 180° nimmt, bis auf die einzelnen Minuten. Sind aber auch Secunden bestimmt: so nimmt man auch hier an, daß sich die Unterschiede der trigonometrischen Linien, wie auch ihrer Logarithmen, wie die Unterschiede der dazu gehörigen Winkel verhalten. Diese Voraussetzung braucht man auch, wenn eine gegebene trigonometrische Linie, oder ihr Logarithmus in den Tafeln nicht genau gefunden wird. Die größern Tafeln erleichtern dergleichen Berechnungen.

4. Auf diesen Lehrsatz gründet sich auch die Einrichtung des sogenannten geradlinichten Transporteurs. Es sey Fig. 180. AC, AB, rechtwinklicht. Aus den Tafeln nehme man den Sinus von $2\frac{1}{2}$ Grad doppelt, und trage solchen nach einem tausendtheiligen Maaßstabe auf AC aus A in 5, so ist A . 5 die Sehne von 5 Grad. Auf eben die Art trage man auf BD aus B in 10 den doppelten Sinus von 5 Grad: so ist B . 10 die Sehne von 10 Grad. Eben so sey A . 15 die Sehne von 15 Grad, und so weiter wechselsweise bis zur Sehne von 90 Grad. Nun theile man AB in 5 gleiche Theile, und ziehe die Transversallinien B . 5, 5 . 10, 10 . 15 u. s. w. für die einzelnen Grade, wie beym verjüngten Maaßstabe. Soll nun ein Winkel von n Grad aufgetragen werden: so ziehe man

Digitized by Google

aus der Spitze mit der Sehne von 60 Grad, oder dem Halbmesser, einen Bogen, und schneide auf demselben die Sehne von n Grad ab. Da aber nur die unmittelbar aufgetragenen Sehnen einigermaßen richtig sind: so leistet der tausendtheilige Maaßstab solche Dienste viel genauer, wenn man statt der Sehne von 60 Grad 1000 vom Maaßstabe, und aus den Tafeln den doppelten sin. $\frac{1}{2}$ m nimmt, wenn der aufzutragende Winkel m ist.

Anmerkung. Auf dem Proportionalcirkel findet man neben der arithmetischen Linie, auch die Sinus-Tangenten- Secantenlinie = a. Ist nun a der Halbmesser eines Cirkels, folglich der Sinus von 90 Grad: so ist $\frac{1}{2}$ a der Sinus von 30 Grad, und man kann, wenn die Sinus für diesen Halbmesser a aufgetragen sind, solche nun für jeden Halbmesser bey gehöriger Oefnung des Proportionalcirkels finden. Ist a der Durchmesser eines Cirkels: so ist $\frac{1}{2}$ a die Tangente von 45 Grad, und $\frac{1}{2}$ a die Secante von 0 Grad, und man kann wenn die Tangenten und Secanten für diesen Halbmesser $\frac{1}{2}$ a aufgetragen sind, solche für jeden Halbmesser bey gehöriger Oefnung des Proportionalcirkels finden. Ist auf dem Proportionalcirkel auch eine Linie für die Sehnen aufgetragen: so hat solche vor dem geradelinichten Transporteur und dem 1000theiligen Maaßstabe noch die Bequemlichkeit zum voraus, daß man den Halbmesser, oder die Sehne von 60 Grad, womit man bey Auftragung der Winkel den Bogen ziehet, so klein als man will annehmen kann.

II. Lehren zur Berechnung ebener Triangel.

§. 47.

In jedem rechtwinklichten Triangel ACK, verhalten sich die Seiten wie die Sinus der entgegengesetzten

ſetzten Winkel; auch verhält ſich die eine Cathete zur andern, wie der Sinus totus zur Tangente des der andern Kathete entgegengeſetzten Winkels. Fig. 178.

Aus C ziehe man mit CA den Bogen AB, und BD der AK parallel: ſo iſt CB : BD = CK : KA. Nun iſt CB : BD = ſin. tot. : ſin. KCA. Folglich iſt auch CK : KA = ſin. tot. : ſin. KCA. Ferner iſt CD : DB = CA : AK. Nun iſt CD : DB = cof. KCA : ſin. KCA, und cof. KCA = ſin. AKC, daher CD : DB = ſin. AKC : ſin. KCA. Folglich iſt CA : AK = ſin. AKC : ſin. KCA. Nun war AK : CK = ſin. KCA : ſin. tot. Folglich iſt auch CA : CK = ſin. AKC : ſin. tot.

Auch iſt offenbar CA : AK = ſin. tot. : tang. ACK. Wäre KA der Halbmeſſer, ſo wäre eben ſo KA : AC = ſin. tot. : tang. AKC. Alsdenn iſt die Hypothenuſe CK die Secante, im erſten Falle von ACK, im zweyten von AKC.

§. 48.

In jedem Triangel ABD, verhalten ſich die Seiten wie die Sinus der entgegengeſetzten Winkel. Fig. 181.

Um den Triangel ABD beſchreibe man einen Cirkel, und ziehe CA, CD, CB. Da $\frac{1}{2}$ AD = ſin. $\frac{1}{2}$ ACD, $\frac{1}{2}$ DB = ſin. $\frac{1}{2}$ DCB, und $\frac{1}{2}$ AB = ſin. $\frac{1}{2}$ ACB; aber III. §. 85. ABD = $\frac{1}{2}$ ACD; DAB = $\frac{1}{2}$ DCB; und AEB = $\frac{1}{2}$ ACB: ſo iſt $\frac{1}{2}$ AD = ſin. ABD, $\frac{1}{2}$ DB = ſin. DAB, und $\frac{1}{2}$ AB = ſin. AEB, oder weil III. §. 87. AEB + ADB = 2 R. §. 42. $\frac{1}{2}$ AB = ſin. ADB. Demnach iſt ſin. ABD : ſin. DAB = $\frac{1}{2}$ AD : $\frac{1}{2}$ DB = AD : DB; ſin. DAB : ſin. ADB = $\frac{1}{2}$ AD : $\frac{1}{2}$ AB = DB : AB; und ſin. ABD : ſin. ADB = AD : AB.

Digitized by Google

§. 49.

Von zwey ungleichen Größen, a, b, besteht die größere a, aus der halben Summe, und der halben Differenz beyder Größen, $\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)$; und die kleinere aus der halben Summe, weniger der halben Differenz beyder Größen, $\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)$.

Da II. §. 21. $(a+b)+(a-b)=2a$: so ist $a=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)$. Da auch II. §. 26. $(a+b)-(a-b)=2b$: so ist $b=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)$.

§. 50.

In jedem Triangel ABC, verhält sich die Summe zweyer Seiten, AC + CB, zu ihrer Differenz, AC — CB, wie die Tangente der halben Summe der entgegengesetzten Winkel, $\frac{1}{2}(B+A)$, zur Tangente ihrer halben Differenz, $\frac{1}{2}(B-A)$. Fig. 182.

Man verlängre AC, mache CD = CB = CE, und ziehe BE: so ist AD = AC + CB, und AE = AC — CB, auch III. §. 93. DBE ein rechter Winkel, und III. §. 46. DCB = B + A = 2 CEB, daher CEB = $\frac{1}{2}(B+A)$. Ziehet man nun AF der BE parallel: so ist CAF = CEB = $\frac{1}{2}(B+A)$. Nun ist §. 49. CAB = $\frac{1}{2}(B+A)-\frac{1}{2}(B-A)$ = CAF — BAF. Folglich ist BAF = $\frac{1}{2}(B-A)$.

Verlängert man DB bis sie die AF in F schneidet: so ist DFA = DBE = R. Folglich ist §. 47. für den Halbmesser AF, die FD = tang. CAF = tang. $\frac{1}{2}(B+A)$, und die FB = tang. BAF = tang. $\frac{1}{2}(B-A)$. Nun ist III. §. 116. AD : AE = FD : FB. Folglich ist AC + CB : AC — CB = tang. $\frac{1}{2}(B+A)$: tang. $\frac{1}{2}(B-A)$.

§. 51.

Digitized by Google

§. 51.

Aufgabe: In einem Triangel ABC, dessen Seiten bekannt sind, wird von der Spitze eines Winkels A, auf die entgegengesetzte Seite BC, ein Perpendikel AD, gefällt; man soll die beyden Abschnitte dieser Seite, CD, DB, finden. Fig. 183.

Man mache DE = DB, beschreibe aus A mit AB einen Cirkel, welcher CA in F schneidet, und verlängre CA nach G: so ist CG = CA + AB, und CF = CA — AB. Nun ist III. §. 147. BC : CG = CF : CE. Folglich ist BC : CA + AB = CA — AB : CE, und daher CE bestimmt. Auch ist EB = CB — CE, und daher DB = ½ EB bestimmt.

III. Aufgaben für die Berechnung ebener Triangel.

§. 52.

Aufgabe: In einem Triangel ABC, sind zwey Winkel, nebst einer Seite, gegeben; man soll die beyden übrigen Seiten berechnen. Fig. 183.

Sind zwey Winkel bekannt: so ist es auch der dritte; und es ist, wenn irgend eine Seite AB gegeben ist, §. 48. sin. C : AB = sin. B : AC = sin. A : BC.

§. 53.

Aufgabe: In einem Triangel ABC, sind zwey Seiten, nebst einem Winkel, welcher einer dieser Seiten entgegengesetzt ist, gegeben; man soll einen von den übrigen Winkeln berechnen. Fig. 183.

Wäre z. E. CA, AB, und der Winkel B, gegeben, so ist §. 48. CA : sin. B = AB : sin. C.

Digitized by Google

Zusatz. Ob der Winkel C, stumpf, oder spitz seyn müsse, läßt sich leicht aus den Umständen abnehmen.

§. 54.

Aufgabe: In einem Triangel ABC, sind zwey Seiten, AC, CB, nebst dem eingeschlossenen Winkel C, gegeben; man soll einen von den übrigen Winkeln berechnen. Fig. 183.

Da $B + A = 180° - C$: so hat man auch $\frac{1}{2}(B+A) = 90 - \frac{1}{2}C$. Nun ist §. 50. $AC + CB : AC - CB = \text{tang. } \frac{1}{2}(A+B) : \text{tang. } \frac{1}{2}(A-B)$, und man hat §. 49. $A = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2}(A-B)$.

Zusatz. Wäre der eingeschlossene Winkel C, ein rechter: so gäbe §. 47. eine leichtere Auflösung.

§. 55.

Aufgabe: In einem Triangel ABC, sind die drey Seiten gegeben; man soll einen der drey Winkel berechnen. Fig. 183.

Man fälle den Perpendikel AD, suche §. 51. den Abschnitt DB: so hat man in dem $\triangle$ ADB, den rechten Winkel D, und die beyden Seiten DB, BA, und findet §. 47. oder 53. den Winkel B.

Anmerkung. Wie zur Berechnung der trigonometrischen Aufgaben die logarithmischen und trigonometrischen Tafeln zu gebrauchen sind, erhellet genugsam aus §. 46. Zus. 2. 3. und aus der Lehre von den Logarithmen, wovon eine Wiederholung überflüßig seyn würde.

Digitized by Google

Drittes Kapitel.

Von der Berechnung körperlicher Triangel, oder die sphärische Trigonometrie.

I. Natur der sphärischen Triangel.

§. 56.

Jede zwey größte Cirkel, PAQ, PDQ, schneiden einander im Durchmesser der Kugel, PQ, und halbiren daher einander. Fig. 184.

Da III. §. 157. zwey Ebenen einander in einer geraden Linie schneiden, und III. §. 198. ein größter Cirkel durch den Mittelpunkt der Kugel C, gehet: so muß III. §. 196. der Durchschnitt zweyer größter Cirkel der Durchmesser der Kugel seyn. Nun ist III. §. 196. der Durchmesser der Kugel auch der Durchmesser des größten Cirkels. Folglich halbiren die größten Cirkel einander, so daß PAQ, PBQ, PDQ, halbe Cirkel sind.

Zusatz. 1. Durch jede zwey Punkte auf der Oberfläche der Kugel, und durch den Mittelpunkt der Kugel, wird III. §. 156. die Lage eines größten Cirkels bestimmt.

2. Von jedem Punkte auf der Oberfläche der Kugel läßt sich III. §. 165. auf jeden gegebenen größten Cirkel ein Perpendikel fällen, und durch solchen Perpendikel, und den Mittelpunkt der Kugel, ein andrer größter Cirkel legen, dessen Lage hiedurch bestimmt ist, und welcher III. §. 172. auf dem gegebenen größten Cirkel senkrecht ist.

Digitized by Google

§. 57.

Die Peripherie eines größten Cirkels ADB, stehet in allen Punkten von seinem Pol P, um den Quadranten PD, eines größten Cirkels PDQ, ab. Fig. 184.

Verbindet man den Pol mit dem Mittelpuncte mittelst der geraden Linie PC: so ist III. §. 199. solche auf dem Cirkel ADB, folglich auch III. §. 154, 2. auf der geraden Linie CD senkrecht, folglich PCD ein rechter Winkel, und PD ein Quadrant.

Zusatz. Da PC senkrecht, so ist III. §. 172. auch PCD senkrecht auf ADB; und überhaupt jeder größte Cirkel durch den Pol eines andern auf diesen andern senkrecht.

§. 58.

Ein sphärischer Winkel APD, ist die Neigung zweyer größten Cirkel gegen einander, oder die Neigung zweyer Bogen größter Cirkel AP, PD, auf der Oberfläche der Kugel, gegen einander. Fig. 184.

Zusatz. 1. Das Maaß eines sphärischen Winkels ist daher III. §. 154, 6. jeder ebene Winkel, welcher auf dem Durchschnitte PQ der beyden größten Cirkel senkrecht ist, wie EPF, oder LQM, oder HGK, oder ACD, oder auch der Bogen dieses Winkels AD, welcher der Bogen eines größten Cirkels ist, der von der Spitze des sphärischen Winkels P, in allen Punkten um einen Quadranten abstehet.

2. Jede sphärische Nebenwinkel APD, DPB, deren Maaß die Bogen AD, DB, sind zusammen zwey rechten Winkeln gleich.

3. Daher sind auch jede sphärischen Verticalwinkel ADQ, PDB, einander gleich.

4. Ein

Digitized by Google

4. Ein größter Cirkel PDQ, ist auf einen andern ADB, senkrecht, wenn ihr Neigungswinkel ACD, ein rechter Winkel ist, das ist, §. 75. Zus. wenn er durch den Pol P des Cirkels ADB gehet.

§. 59.

Ein sphärischer Triangel DAP, ist ein Theil der Oberfläche einer Kugel, welcher von drey Bogen größter Cirkel DA, AP, PD, begrenzt wird. Diese Bogen heißen die Seiten, und die sphärischen Winkel, welche von den Seiten eingeschlossen werden, die Winkel des sphärischen Triangels. Fig. 184.

Zusatz. Ein sphärischer Triangel ist die sphärische Grundfläche DAP, eines pyramidenförmigen dreyseitigen Körpers, dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel C, und dessen Seitenflächen die ebenen Winkel ACP, PCD, DCA, als Theile größter Cirkel sind, welche zu ihrem Maaße die Bogen AP, PD, DA, haben.

§. 60.

Sind in einem sphärischen Triangel, PAD, zwey Seiten AP, PD, Quadranten: so sind die solchen Seiten entgegengesetzten Winkel ADP, DAP, rechte Winkel, und die dritte Seite AD, das Maaß des dritten ihr entgegengesetzten Winkels APD. Fig. 184.

Sind AP, PD, Quadranten: so sind ACP, DCP, rechte Winkel; folglich III. §. 158. PC senkrecht auf ADB. Folglich III. §. 172. sind auch die Ebenen der Bogen AP, PD, auf ADB senkrecht, und daher ADP, PAD rechte Winkel. Nun ist auch P der Pol von ADB. Folglich ist §. 58. Zus. 1. der Bogen AD das Maaß des Winkels APD.

Zusatz. 1. Wäre AD auch ein Quadrant: so wäre APD, auch ein rechter Winkel. Wäre, wie in dem Trian-

Digitized by Google

Triangel PDB, die dritte Seite DB größer als ein Quadrant: so ist DPB größer, als ein rechter Winkel.

2. Ein sphärischer Triangel heißt rechtwinklicht, der einen rechten Winkel hat, schiefwinklicht, worinn kein rechter Winkel ist.

Anmerkung. In einem sphärischen Triangel beträgt die Summe der Winkel allemal mehr als zwey rechte Winkel; ja sie kann wohl gegen sechs rechte Winkel sich belaufen. Die Summe der drey Seiten ist III. §. 176. kleiner als vier Quadranten. Jede zwey Seiten sind III. §. 177. zusammen größer als die dritte. Triangel, worinn alle, oder zwey Winkel, rechte Winkel sind, bedürfen keiner besondern Auflösung.

II. Berechnung rechtwinklichter sphärischer Triangel.

§. 61.

Aufgabe: Einen rechtwinklichten sphärischen Triangel mit den zugehörigen Bestimmungen zu zeichnen. Fig. 185.

1. Es sey der Cirkel AFEB die Grundfläche einer Halbkugel, und werde von einem andern größten Cirkel ADPE, senkrecht in AE geschnitten. Ein dritter größter Cirkel ADLF schneide gleichfalls den ersten unter einem spitzen Winkel in BF. Der Durchschnitt des dritten mit dem zweyten sey CD: so ist ADB ein rechtwinklichter sphärischer Triangel, oder ADBC ein pyramidenförmiger dreyseitiger Körper, dessen Seitenflächen die ebenen Winkel ACD, DCB, BCA, sind, welche die Seiten des sphärischen Triangels AD, DB, BA, zu ihrem Maaße haben; und zwar ist A der rechte Winkel, B und D aber die schiefen Winkel, BD, die Hypothenuse, DA, AB, die Perpendikel. Für den einen schiefen Winkel B heiße BA

der

der anliegende, und AD der entgegengesetzte Perpendikel; für den andern schiefen Winkel D aber heiße DA der anliegende, und AB der entgegengesetzte Perpendikel. Eben so heißt auch von den schiefen Winkeln der eine der anliegende, der andre der entgegengesetzte.

2. Von D in der senkrechten Ebene ADPE, fälle man auf die Ebene ABE den Perpendikel DG: so trift solcher III. §. 173. die Durchschnittslinie AE in G. In der Ebene ABE, fälle man von G, auf die Linie BF, den Perpendikel GH, und ziehe HD: so ist DGH ein rechter Winkel, die Ebene DGH auf der Ebene ABE senkrecht, und daher auch DH auf BF senkrecht. Demnach entsteht eine dreyseitige Pyramide DGHC, welche von den rechtwinklichten Triangeln DGH, DGC, DHC, GHC, begrenzt wird; auch haben die ebenen Winkel, welche den körperlichen Winkel der Spitze einschließen, die Seiten des sphärischen Triangels AD, DB, BA, zu ihrem Maaße, und es ist §. 58. DHG = ABD.

3. Halbirt man die halben Cirkel BAF, BDF, in K, L, und legt durch solche einen größten Cirkel KLP, welcher den Cirkel ADE in P trift: so sind BK, BL, Quadranten, welche §. 60. bey K und L rechte Winkel machen; daher B der Pol des Cirkels KLP, folglich §. 58. KL das Maaß des Winkels ABD. Eben so beweist man, weil bey A und K rechte Winkel sind, daß PA, PK Quadranten sind, und P der Pol des Cirkels AK, folglich AK das Maaß des Winkels LPD ist.

4. Der hiedurch entstandne sphärische Triangel LPD ist dem zuerst angenommenen sphärischen Triangel ADB, völlig zugehörig. Denn A = L, weil BL auf KP senkrecht; D = D, weil es Verticalwinkel; KL das Maaß des Winkels B, ist das Complement von LP zu einem Quadranten; AK ist das Complement von BA, und das Maaß des Winkels P; von AD ist das Complement DP; endlich von BD ist das Complement DL.

§. 62.

Digitized by Google

§. 62.

In jedem rechtwinklichten sphärischen Triangel ADB, Fig. 185. ist

1. der Halbmesser zum Sinus der Hypothenuse, wie der Sinus des einen schiefen Winkels, zum Sinus des entgegengesetzten Perpendikels; oder r : sin. BD = sin. B : sin. AD.

2. Der Halbmesser zur Tangente der Hypothenuse, wie der Cosinus des einen schiefen Winkels zur Tangente des anliegenden Perpendikels; oder r : tang. BD = cos. B : tang. BA.

3. Der Halbmesser zur Tangente des einen schiefen Winkels, wie der Sinus des anliegenden zur Tangente des entgegengesetzten Perpendikels; oder r : tang. B = sin. BA : tang. AD.

4. Der Halbmesser zum Cosinus des einen Perpendikels, wie der Cosinus des andern zum Cosinus der Hypothenuse, oder r : cos. BA = cos. AD : cos. DB.

5. Der Halbmesser zum Cosinus des einen Perpendikels, wie der Sinus des anliegenden zum Cosinus des entgegengesetzten schiefen Winkels; oder r : cos. AD = sin. D : cos. B.

6. Der Halbmesser zum Cosinus der Hypothenuse: wie die Tangente des einen zur Cotangente des andern schiefen Winkels; oder r : cos. BD = tang. D : cot. B.

In △DCG sey CD der Halbmesser: so ist DG = sin. DCG, und daher CD : DG = r : sin. DCG. Im △DHG sey HD der Halbmesser: so ist DG = sin. DHG, und daher DG : HD = sin. DHG : r. Folglich ist CD : HD = sin. DHG : sin. DCG. Nun sey im △DCH, CD der Halbmesser: so ist DH = sin. DCH, und daher

CD

CD : DH = r : sin. DCH. Folglich ist r : sin. DCH = sin. DHG : sin. DCG; folglich r : sin. BD = sin. B : sin. AD. (§. 61, 2).

Eben so, wenn CH der Halbmesser ist GH = tang. GCH, und daher CH : GH = r : tang. GCH. Ist DH der Halbmesser: so ist GH = cos. DHG, und daher GH : DH = cos. DHG : r. Folglich ist CH : DH = cos. DHG : tang. GCH. Nun ist, wenn CH der Halbmesser, auch DH = tang. DCH, und daher CH : DH = r : tang. DCH. Folglich ist r : tang. DCH = cos. DHG : tang. GCH; folglich r : tang. BD = cos. B : tang. BA.

Eben so, wenn CG der Halbmesser, ist GH = sin. GCH, und daher GH : CG = sin. GCH : r. Ist CG der Halbmesser; so ist DG = tang. DCG, und daher CG : DG = r : tang. DCG. Folglich ist GH : DG = sin. GCH : tang. DCG. Nun ist, wenn GH der Halbmesser, DG = tang. DHG, und daher GH : DG = r : tang. DHG. Folglich ist r : tang. DHG = sin. GCH : tang. DCG; folglich r : tang. B = sin. BA : tang. AD.

Im rechtwinklichten sphärischen Triangel LPD ist nach dem ersten Gesetze r : sin. PD = sin. P : sin. LD. Nun ist §. 61, 4. sin. PD = cos. AD; sin. P = cos. BA; sin. LD = cos. DB. Folglich ist r : cos. AD = cos. BA : cos. DB; folglich r : cos. BA = cos. AD : cos. DB.

Eben so ist in diesem Triangel nach dem ersten Gesetze r : sin. PD = sin. D : sin. PL. Nun ist sin. PD = cos. AD; sin. D = sin. D; sin. PL = cos. KL = cos. B. Folglich ist r : cos. AD = sin. D : cos. B.

Endlich ist nach dem dritten Gesetze r : tang. D = sin. DL : tang. PL. Nun ist sin. DL = cos. BD, und

tang.

Digitized by Google

tang. PL = cot. KL = cot. B. Folglich ist r : tang. D = cos. BD : cot. B; folglich r : cos. BD = tang. D : cot. B.

Zusatz. 1. Wendete man das dritte Gesetz auch auf den Winkel P, und das zweyte auf den Winkel D und P an: so würde man noch drey andere Gesetze erhalten, welche aber nichts neues gäben.

2. Alle diese Gesetze lassen sich auch auf den rechtwinklichten Triangel DEF, anwenden, worinn zwey Seiten die Complemente der beyden Seiten des erstern Triangels DAB, zu zwey Quadranten sind; wozu es also nöthig zu bestimmen ist, von welcher Gattung die nach solchen Gesetzen berechneten Seiten und Winkel seyn müssen, ob sie nämlich zu spitzen oder stumpfen Winkeln gehören.

§. 63.

In jedem rechtwinklichten sphärischen Triangel sind die Perpendikel mit ihren entgegengesetzten Winkeln, und die Winkel mit den entgegengesetzten Perpendikeln von einerley Gattung. Fig. 185.

Im Triangel ADB ist AD kleiner als ein Quadrant AP, und KL das Maaß des Winkels B, kleiner als der Quadrant KP. Im Triangel EDB ist ED größer als der Quadrant EP, und der Winkel EBD größer als ein rechter Winkel, weil sein Nebenwinkel DBA, kleiner ist. Auf eben die Art beweist man auch den umgekehrten Satz.

§. 64.

In jedem rechtwinklichten Triangel, ist die Hypothenuse kleiner oder größer als ein Quadrant, je nachdem die beyden Perpendikel, oder die beyden schiefen Winkel, oder der eine Perpendikel mit dem anliegenden Winkel von einerley oder von verschiedener Gattung sind. Auch sind die genannten Stücke von einerley oder verschiedener Gattung, je nachdem die Hypothe-

Digitized by Google

thenuse kleiner, oder größer als ein Quadrant ist. Fig. 185.

Durch M, den Pol des größten Cirkels ADPE, und durch D, lege man einen größten Cirkel DM. Sind nun in dem Triangel ADB, beyde Perpendikel DA, AB, kleiner als Quadranten: so ist §. 63. in dem Triangel ADM, der Winkel M kleiner als ein rechter, und daher BD kleiner als ein Quadrant. Sind eben so, in dem Triangel EDB beyde Perpendikel DE, EB, größer als Quadranten: so ist §. 63. DME größer, folglich DMA kleiner als ein rechter Winkel, und daher BD kleiner als ein Quadrant.

Durch D und einem willkürlichen Punkt N zwischen M und E, lege man einen größten Cirkel DN. Sind nun DA, AN, oder DE, EN, von verschiedener Gattung: so zeigt man auf eben die Art, daß alsdann DN größer als ein Quadrant sey.

Auf eben den Gründen beruhet der Beweiß des umgekehrten Satzes.

Anmerkung. Sollten ohngeachtet §. 63. 64. noch Zweydeutigkeiten übrig bleiben: so muß man solche aus den Umständen der Sache heben.

§. 65.

Aufgabe: In einem rechtwinklichten sphärischen Triangel ABD, sind außer dem rechten Winkel zwey Stücke gegeben: man soll die übrigen berechnen. Fig. 185.

Da in dem Triangel außer dem rechten Winkel nur noch 5 Stücke, die Hypothenuse, die beyden Perpendikel, und die beyden schiefen Winkel enthalten sind; und man von diesen 2 Stücke giebt, und 1 Stück sucht: so berechne man letzteres nach demjenigen Gesetze, des §. 62. in welchem die beyden gegebenen Stücke nebst dem ge-

Digitized by Google

suchten enthalten sind, dergestalt, daß wenn das gesuchte eines der mittlern, oder eines der äußern Glieder der Proportion ist, man im ersten Falle die Logarithmen der äußern Glieder addirt, und von solcher Summe den Logarithmus des andern mittlern Gliedes subtrahirt; im andern Falle aber, die Logarithmen der mittlern Glieder addirt, und von solcher Summe den Logarithmus des andern äußern Gliedes subtrahirt. Sollten hiebey Zweydeutigkeiten vorkommen: so hebt man solche nach §. 63. 64. oder nach den Umständen.

Daß aber für alle dergleichen Aufgaben die sechs Gesetze des §. 62. hinreichen, ist leicht zu übersehen, da ausser folgenden 6 Fällen kein andrer möglich ist. Denn man verbindet

1. Die Hypothenuse mit beyden Perpendikeln, nach dem vierten Gesetze.

2. Die Hypothenuse mit den beyden Winkeln, nach dem sechsten Gesetze.

3. Die Hypothenuse mit einem Perpendikel und dem anliegenden Winkel, nach dem zweyten Gesetze.

4. Die Hypothenuse mit einem Perpendikel, und dem entgegengesetzten Winkel, nach dem ersten Gesetze.

5. Beyde Perpendikel mit einem Winkel, nach dem dritten Gesetze.

6. Beyde Winkel mit einem Perpendikel, nach dem fünften Gesetze.

Anmerkung. 1. Auch auf folgende Art läßt sich die Sache übersehen. Es sind nämlich von besagten 5 Stücken

I. 3 Seiten num. 1.

II. 2 Seiten und ein Winkel, und zwar

Digitized by Google

1) 2 Perpendikel und 1 Winkel. num. 5.
2) Die Hypothenuse und ein Perpendikel nebst
   a) dem entgegengesetzten Winkel. num. 4.
   b) dem anliegenden Winkel. num. 3.

III. 1 Seite und 2 Winkel, nämlich
1) die Hypothenuse. num. 2.
2) Ein Perpendikel. num. 6.

2. Sind in dem aufzulösenden rechtwinklichten sphärischen Triangel einige Seiten größer als Quadranten, und einige Winkel stumpf: so kann man füglich anstatt desselben seinen Nebentriangel auflösen, dessen Seiten und Winkel die Ergänzung zu zwey Quadranten oder zwey rechten Winkeln sind.

III. Berechnung schiefwinklichter sphärischer Triangel.

§. 66.

Lehrsatz. Bey jeden zwey Bogen eines Cirkels, AB, BD, verhält sich die Summe ihrer Sinus zur Differenz, wie die Tangente der halben Summe der Bogen zur Tangente der halben Differenz; oder sin. AB + sin. BD : sin. AB — sin. BD = tang. $\frac{AB + BD}{2}$: tang. $\frac{AB - BD}{2}$. Fig. 186.

Halbirt man den Bogen AD = AB + BD in E: so ist AE = ED = $\frac{AB + BD}{2}$, die halbe Summe der Bogen, folglich §. 49. BE = $\frac{AB - BD}{2}$, die halbe Differenz der Bogen. Ziehet man die Sehne AD, und die

Digitized by Google

Halbmesser CB, CE: so ist $FD = \frac{AK + KD}{2}$ und aus dem vorigen Grunde $FK = \frac{AK - KD}{2}$. Endlich fälle man auf CB, von A und D, die Perpendikel AG, DH, welche die Sinus der Bogen AB, BD, sind. Da leicht erweislich, daß $\triangle AGK \sim \triangle DHK$: so ist AG : DH = AK : KD, folglich auch II. §. 86. $\frac{AG + DH}{2} : \frac{AG - DH}{2} = \frac{AK + KD}{2} : \frac{AK - KD}{2} = FD : FK$. Ist nun CF der Halbmesser: so ist FD = tang. ED = tang. $\frac{AB + BD}{2}$, und FK = tang. EB = tang. $\frac{AB - BD}{2}$; auch war AG = sin. AB, und DH = sin. BD. Folglich ist $\frac{\text{sin. AB} + \text{sin. BD}}{2} : \frac{\text{sin. AB} - \text{sin. BD}}{2} = \text{tang.} \frac{AB + BD}{2} : \text{tang.} \frac{AB - BD}{2}$; folglich auch sin. AB + sin. BD : sin. AB — sin. BD = tang. $\frac{AB + BD}{2}$: tang. $\frac{AB - BD}{2}$.

Zusatz. Daher ist auch bey jeden zwey Bogen LN, NA, die Summe ihrer Cosinus zur Differenz, wie die Cotangente der halben Summe der Bogen zur Tangente der halben Differenz; oder cos. NA + cos. LN : cos. NA − cos. LN = cot. $\frac{LN + NA}{2}$: tang. $\frac{LN - NA}{2}$.

Denn, wenn man LA in M halbirt: so ist AM das Complement von DE zu einem Quadranten, folglich ME ein Quadrant. Nun sey MN = BE: so ist auch NB ein Quadrant, folglich NA das Complement von AB, und LN das Complement von BD. Nun war sin. AB + sin. BD : sin. AB — sin. BD = tang. ED : tang. EB.

Folg-

Digitized by Google

Folglich ist cos. NA + cos. LN : cos. NA — cos. LN = cotang. AM : tang. MN. Nun ist $AM = \frac{LN + NA}{2}$, und $MN = \frac{LN - NA}{2}$. Folglich ist cos. NA + cos. LN : cos. NA — cos. LN = cotang. $\frac{LN + NA}{2}$: tang. $\frac{LN - NA}{2}$.

§. 67.

In jedem schiefwinklichten sphärischen Triangel fällt ein Perpendikel, von der Spitze auf die Grundlinie, innerhalb des Triangels, wenn die Winkel an der Grundlinie von einerley Gattung sind; außerhalb aber, wenn solche Winkel von verschiedner Gattung sind. Fig. 187.

Es sey ADad die Grundfläche einer Halbkugel, welche von zwey größten Cirkeln Aa, Dd, die selbst einander in B schneiden, so geschnitten werde, daß vier schiefwinklichte Triangel ABD, aBd, DBa, dBA, entstehen. Ein dritter größter Cirkel EBe schneide die Grundfläche senkrecht: so lehrt der Anblick, daß der Perpendikel BE oder Be, innerhalb der Triangel ABD, aBd, falle, wo an der Grundlinie AD zwey spitze, und an der Grundlinie ad zwey stumpfe Winkel sind; daß hingegen solcher Perpendikel außerhalb der Triangel DBa, dBA, falle, wo an der Grundlinie Da, der eine Winkel D, stumpf, der andre a, spitz, und an der Grundlinie dA, der eine d, spitz, der andre A, stumpf ist.

Der Beweiß des Satzes gründet sich auf §. 63. woraus man leicht ersiehet, daß im Fall des Gegentheils der Perpendikel zugleich kleiner und größer als ein Quadrant seyn müßte, welches unmöglich ist.

Zusatz. 1. Durch den Perpendikel BE wird jeder schiefwinklichte Triangel, wie ABD, ABd, auf zwey

Digitized by Google

rechtwinklichte gebracht; ersterer auf ABE, EBD; letzterer auf dBE, EBA. Die Theile der Grundlinie, welche von dem Perpendikel und den Schenkeln begrenzt werden, heißen die **Abschnitte der Grundlinie**, wie AE, ED; oder dA, AE. Die Winkel, welche der Perpendikel mit den Schenkeln einschließt, heißen die **Abschnitte des Scheitels**, wie ABE, EBD; oder dBE, EBA. Auch sagt man z. E. daß die Abschnitte AE, ABE, dem Schenkel AB, und dem Winkel A, **anliegend**, hingegen dem Schenkel DB, und dem Winkel D, **entgegengesetzt** sind; und so in allen Fällen.

2. Auch siehet man leicht, daß das, was von einem dieser vier Triangel Fig. 187. gefunden wird, sich auf die übrigen, doch mit gehörigen Unterschiede anwenden lasse; und daß aus dem bloßen Anschauen der Figur erhelle: von welcher Gattung das Gesuchte in jedem Triangel sey, wohin der Perpendikel jedesmal fallen müsse, und in welchem Falle die Segmente der Grundlinie und des Scheitels zu addiren, oder zu subtrahiren sind.

3. Ferner ist leicht einzusehen, wenn in einem schiefwinklichten Triangel BKD, Fig. 185. eine Seite BK, ein Quadrant wäre, wie man statt dieses Triangels einen rechtwinklichten setzen könne, durch dessen Auflösung zugleich ersterer aufgelöst ist. Denn nimmt man hiezu einen Quadranten BL, und legt durch L und K einen größten Cirkel: so sind §. 60. K und L rechte Winkel, und KL das Maaß des Winkels B; auch ist DL das Complement von BD, und DKL das Complement von BKD. Sind daher drey Stücke in dem Triangel BKD, gegeben: so hat man auch die nöthigen Stücke in dem Triangel KDL; und ist dieser, so ist auch jener aufgelöset.

§. 68.

Digitized by Google

§. 68.

In jedem schiefwinklichten sphärischen Triangel ABD, Fig. 187. sind

1. die Sinus der Winkel, wie die Sinus der entgegengesetzten Schenkel; oder sin. D : sin. A = sin. AB : sin. BD.

2. Die Cosinus der Abschnitte des Scheitels, wie die Tangenten der entgegengesetzten Schenkel; oder cos. DBE : cos. ABE = tang. AB : tang. DB.

3. Die Sinus der Abschnitte der Grundlinie, wie die Tangenten der entgegengesetzten Winkel; oder sin. AE : sin. DE = tang. D : tang. A.

4. Die Cosinus der Abschnitte der Grundlinie, wie die Cosinus der anliegenden Schenkel; oder cos. AE : cos. DE = cos. AB : cos. DB.

5. Die Sinus der Abschnitte des Scheitels, wie die Cosinus der anliegenden Winkel; oder sin. ABE : sin. DBE = cos. A : cos. D.

6. Die Cotangente der halben Summe der Abschnitte der Grundlinie zur Tangente der halben Differenz, wie die Cotangente der halben Summe der Schenkel zur Tangente der halben Differenz; oder $\cot. \frac{AE + ED}{2} : \tang. \frac{AE - ED}{2} = \cot. \frac{AB + BD}{2} : \tang. \frac{AB - BD}{2}$.

7. Die Tangente der halben Summe der Abschnitte des Scheitels zur Tangente der halben Differenz, wie die Cotangente der halben Summe der übrigen Winkel zur Tangente der halben Differenz; oder,

$$\text{tang.}\ \frac{ABE + DBE}{2} : \text{tang.}\ \frac{ABE - DBE}{2} = \text{cotang.}\ \frac{A+D}{2} : \text{tang.}\ \frac{A-D}{2}.$$

Denn theilet man den schiefwinklichten Triangel ABD, mittelst des Perpendikels BE, in die beyden rechtwinklichten Triangel ABE, DBE, und wendet die Gesetze des §. 62. auf dieselben an: so ist:

Nach dem ersten Gesetze, in △BED, r : sin. BD = sin. D : sin. BE, und im △ABE, r : sin. AB = sin. A : sin. BE; folglich II. §. 81. sin. AB : sin. BD = sin. D : sin. A.

Nach dem zweyten Gesetze, r : tang. DB = cos. DBE : tang. BE, und r : tang. AB = cos. ABE : tang. BE; folglich tang. AB : tang. DB = cos. DBE : cos. ABE.

Nach dem dritten Gesetze r : tang. D = sin. DE : tang. BE, und r : tang. A = sin. AE : tang. BE; folglich tang. D : tang. A = sin. AE : sin. DE.

Nach dem vierten Gesetze: r : cos. BE = cos. DE : cos. BD, und r : cos. BE = cos. AE : cos. AB; folglich cos. AE : cos. DE = cos. AB : cos. BD.

Nach dem fünften Gesetze, r : cos. BE = sin. DBE : cos. D, und r : cos. BE = sin. ABE : cos. A: folglich sin. ABE : sin. DBE = cos. A : cos. D.

Ferner, da nach dem vierten Gesetze der schiefwinklichten Triangel, cos. AE : cos. DE = cos. AB : cos. DB; folglich auch cos. AE + cos. DE : cos. AE — cos. DE = cos. AB + cos. DB : cos. AB — cos. DB; so ist §. 66.

cot.

Digitized by Google

$$\text{cot.}\ \frac{AE + DE}{2} : \text{tang.}\ \frac{AE - DE}{2} = \text{cot.}\ \frac{AB + DB}{2} : \text{tang.}\ \frac{AB - DB}{2}.$$

Endlich, da nach dem fünften Gesetze der schiefwinklichten Triangel, sin. ABE : sin. DBE = cos. A : cos. D; folglich auch sin. ABE + sin. DBE : sin. ABE — sin. DBE = cos. A + cos. D : cos. A — cos. D; so ist §. 66.

$$\text{tang.}\ \frac{ABE + DBE}{2} : \text{tang.}\ \frac{ABE - DBE}{2} = \text{cot.}\ \frac{A + D}{2} : \text{tang.}\ \frac{A - D}{2}.$$

Zusatz. Diese Gesetze gelten eben so von den übrigen Trjangeln der Fig. 187. wenn man an gehöriger Stelle die gleichlautenden kleinen Buchstaben setzt.

§. 69.

Aufgabe: In einem schiefwinklichten sphärischen Triangel ABD, sind drey Stücke gegeben; man soll die übrigen berechnen. Fig. 187.

Erstlich, wenn zwey Seiten BA, AD, und der eingeschlossene Winkel A gegeben sind, und man fodert

1) die Seite BD: so suche man nach §. 62, 2. aus AB und A den einen Abschnitt der Grundlinie AE, und man hat auch den andern ED = AD — AE. Hierauf suche man nach §. 68, 4. aus AE, ED, AB, den cos. BD.

2. Den Winkel D: so suche man wie vorher AE, ED, und hieraus und dem Winkel A nach §. 68, 3. den tang. D.

Digitized by Google

Zweytens, wenn zwey Seiten BA, BD, und ei entgegengesetzter Winkel A, gegeben sind, und ma fodert

1) die Seite AD: so suche man nach §. 62, 2. AE, und hieraus nach §. 68, 4. cos. ED, da denn nach §. 67. ED addirt, oder subtrahirt wird, um AD zu finden.

2) Den Winkel ABD: so suche man nach §. 62, 6. ABE und hieraus nach §. 68, 2. EBD.

3) Den Winkel D: so sucht man solchen nach §. 68, 1.

Drittens, wenn zwey Winkel, A, B, mit der anliegenden Seite AB gegeben sind, und man fodert

1) den Winkel D: so sucht man nach §. 62, 6. ABE, und man hat ERD, und hieraus nach §. 68, 5. den Winkel D.

2) Die Seite BD: so suche man wie vorher ABE, DBE, und hieraus nach §. 68, 2. tang. BD.

Viertens, wenn zwey Winkel A, D, und die entgegengesetzte Seite AB, gegeben sind, und man fodert

1) den Winkel B: so sucht man nach §. 62, 6. ABE, und hieraus nach §. 68, 5. DBE.

2) Die anliegende Seite AD: so sucht man nach §. 62, 2. AE, und hieraus nach §. 68, 3. ED.

3) Die entgegengesetzte Seite BD: so sucht man solche nach §. 68, 1.

Fünf-

Digitized by Google

Fünftens, wenn drey Seiten gegeben sind, und man fodert einen Winkel, etwa A: so sucht man aus AB, BD, und $\frac{1}{2}$AD, nach §. 68, 6. $\frac{AE - ED}{2}$, und hieraus AE. Endlich hieraus nach §. 62, 2. den Winkel A.

Sechstens, wenn drey Winkel gegeben sind, und man fodert eine Seite, etwa AB: so sucht man aus A, D, und $\frac{1}{2}$ABD, nach §. 68, 7. tang. $\frac{ABE - EBD}{2}$, und hieraus ABE. Endlich hieraus nach §. 62, 6. die Seite AB.

Anmerkung. Daß hierinnen alle Fälle vorkommen, erhellet aus folgender Uebersicht:

I. Es wird ein Winkel gesucht, und es sind gegeben

1. Drey Seiten. num. 5.
2. Zwey Seiten, und ein Winkel; und zwar
   a. Zwey Seiten, welche den gegebenen Winkel einschließen. num. 1, 2.
   b. Zwey Seiten, welche den gesuchten Winkel einschließen. num. 2, 2.
   c. Zwey Seiten, welche den dritten Winkel einschließen. num. 2, 3.
3. Eine Seite und zwey Winkel; und zwar
   a. die Seite zwischen den gegebenen Winkeln. num. 3, 1.
   b. Die Seite zwischen einem gegebenen Winkel und dem gesuchten. num. 4, 1.

II.

Digitized by Google

II. Es wird eine Seite gesucht, und es sind gegeben

1. Drey Winkel. num. 6.

2. Zwey Winkel und eine Seite; und zwar

   a. Zwey Winkel an der gegebenen Seite. num. 3, 2.

   b. Zwey Winkel an der gesuchten Seite. num. 4, 2.

   c. Zwey Winkel an der dritten Seite. num. 4, 3.

3. Ein Winkel und zwey Seiten; und zwar

   a. der Winkel zwischen den gegebenen Seiten. num. 1, 1.

   b. Der Winkel zwischen einer gegebenen und der gesuchten Seite. num. 2, 1.

Digitized by Google

Drittes Buch.

Elemente der Analysis.

Digitized by Google

1. Die gemeine Analysis, oder die Algebra.
2. Die analytische Geometrie.
3. Die höhere Analysis, oder die Analysis des Unendlichen.

Digitized by Google

Erster Abschnitt.

Die gemeine Analysis, oder die Algebra.

1. Von den bestimmten Aufgaben.
2. Von den unbestimmten Aufgaben.

Erstes Kapitel.

Von den bestimmten Aufgaben.

I. Form der Gleichungen.

§. 1.

Eine Gleichung ist eine Verbindung mehrerer bekannter und unbekannter Größen, deren einige zusammen den übrigen zusammen, oder welche alle zusammen der Null gleich sind. Die Größen selbst, welche in der Gleichung durch das Additions- und Subtractionszeichen verbunden sind, heißen die Glieder der Gleichung, und können mit veränderten Zeichen beliebig von der einen Seite des Gleichheitszeichens auf die andre gebracht werden. Ist in irgend einem Gliede die unbekannte Größe in eine bekannte multiplicirt: so heißt der bekannte Factor der Coëfficient der unbekannten Größe.

So ist z. E. $a^2 - ab + b^2 = 3ay + bx$, oder $a^2 - ab + b^2 - 3ay - bx = 0$, eine Gleichung von fünf

fünf Gliedern, und im vierten Gliede $3a$ der Coëfficient der unbekannten Größe y; im fünften b der Coëfficient der unbekannten x.

Zusatz. Man kann füglich einen Unterschied zwischen der **Endgleichung** und den **Mittelgleichungen** machen. Erstere ist als der letzte Schluß anzusehen, auf welchen man bey Auflösung einer Aufgabe kommt, und enthält nicht mehr als eine unbekannte Größe, die mit mehrern bekannten verwickelt ist. Letztere enthalten mehrere unbekannte Größen, und müssen dergestalt mit einander verglichen und verbunden werden, daß daraus zuletzt eine Endgleichung entstehe.

Anmerkung. Die Verbindung, worinn die unbekannte Größe in der Gleichung mit den bekannten Größen stehet, dient solche daraus zu finden; welches Geschäfte demnach die **Analysis** mit der **Arithmetik** gemein hat, doch mit dem Unterschiede, daß die **Arithmetik** die Aufgaben unter ganz speciellen Bedingungen auflöset, und nur die einfachen Operationen lehret, welche man in bestimmten Fällen anzuwenden hat; die **Analysis** aber allgemeine Methoden zur Auflösung der Aufgaben abhandelt, und zeigt, welche einfache Operationen der Arithmetik und in welcher Ordnung solche in bestimmten Fällen anzuwenden sind.

§. 2.

Eine Gleichung ist **einfach**, wenn die unbekannten Größen nur in der ersten Potenz, und einzeln, darinnen vorkommen; **zusammengesetzt** aber, wenn irgend eine der unbekannten Größen in irgend einer Potenz vorkommt, welche höher als die erste ist, oder wenn irgend ein Product zweyer oder mehrerer unbekannter Größen darinn vorhanden ist. Hiernach entstehen **quadratische**, **cubische**, **biquadratische** und noch

Digitized by Google

noch höhere Gleichungen; welche alle nach der höchsten Potenz der unbekannten Größe, oder nach der Anzahl der unbekannten Factoren den Namen erhalten.

So ist die §. 1. angeführte Gleichung einfach. Aber $x^3 = p^5x^2 + q^4y + r$, oder $x^3 - p^5x^2 - q^4y - r = o$ cubisch. Auch ist die Gleichung $xyz - a^7b^4 + m = o$ cubisch.

Zusatz. Hiernach nennt man auch die Gleichungen vom 1, 2, 3, 4, nten Grade, oder von der eben so vielten Dimension, als der Exponent der höchsten Potenz beträgt, in welcher die unbekannte Größe in der Gleichung vorkommt. So sind z. E. alle cubische Gleichungen, vom dritten Grade, oder von der dritten Dimension.

§. 3.

Eine Gleichung ist rein, worinn die unbekannte Größe nur in derjenigen Potenz, wovon die Gleichung den Namen führet, vorkommt; gemischt aber, wenn die unbekannte Größe außer solcher Potenz noch in einer, oder mehrern andern niedrigern Potenzen in der Gleichung vorhanden ist.

So ist z. E. $x^2 + q = o$ eine reine quadratische, und $xyz - a^7b^4 + m = o$ eine reine cubische Gleichung. Hingegen ist $x^2 + mx + q = o$ eine gemischte quadratische, $xyz + xy - a^2b^3 - q = o$ eine gemischte cubische Gleichung. Allgemein ist $x^m \mp x^{m-1} \mp x^{m-2} \ldots \mp r = o$ eine gemischte, und $x^m \mp q = o$ eine reine Gleichung von mten Grade.

§. 4.

Eine gemischte Gleichung heißt vollständig, wenn außer einem Gliede, welches lauter bekannte Größen enthält, die übrigen Glieder alle Potenzen der unbe-

Digitized by Google

kannten Größe von der ersten an bis zu derjenigen enthalten, von welcher die Gleichung den Namen führet; unvollständig aber, wenn ein oder mehrere Glieder einer vollständigen Gleichung fehlen. Hiezu wird die Gleichung II. §. 31. nach den Potenzen der unbekannten Größe geordnet.

So ist z. E. $x^3 \mp mx^2 \mp nx \mp q = 0$ eine vollständige cubische Gleichung, welche daher vier Glieder haben muß, und unvollständig wird, wenn eins oder mehrere derselben fehlen; wodurch der Begriff eines Gliedes, welcher §. 1. gegeben worden, näher bestimmt wird.

Zusatz. 1. Jede reine Gleichung ist als eine unvollständige Gleichung anzusehen, welche nur zwey Glieder hat, wovon das eine lauter bekannte Größen, das andre aber die unbekannte Größe in derjenigen Potenz enthält, wornach diese Gleichung benannt wird.

2. Eine Formel, welche alle Glieder einer vollständigen Gleichung von einem bestimmten Grade enthält, heißt die allgemeine Form der Gleichung dieses bestimmten Grades, worauf alle vorkommende Gleichungen gebracht werden können. So ist das obige Beyspiel die allgemeine Form aller cubischen Gleichungen.

§. 5.

Eine Gleichung wird reducirt, wenn man ihre Glieder durch Hülfe der arithmetischen Operationen so viel möglich zusammen ziehet, und bequemer ausdrückt, so daß die Gleichung zuletzt auf ihre allgemeine Form gebracht ist. Nämlich

1. Lassen sich einige Glieder durch Addition oder Subtraction zusammenziehen: so wird dadurch ihre Anzahl vermindert.

Aus

Digitized by Google

Aus $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$ wird, wenn man $2x$ subtrahirt, und $3a$ addirt, $5b = 8a + x$. Aus $\frac{2ab + bx}{a} - b = a + b$ wird $\frac{bx}{a} = a$. Aus $abx + a^3 - a^2x = ab^2 - 2abx - x^3$ wird $x^3 + (3ab - a^2)x + (a^3 - ab^2) = 0$.

2. Ist ein Factor, oder ein Divisor allen Gliedern der Gleichung gemein: so wird die Gleichung mit solchem Factor dividirt, oder mit solchem Divisor multiplicirt.

Aus $15b^2 = 24ab + 3bx$ wird, wenn man mit $3b$ dividirt, $5b = 8a + x$. Aus $\frac{b^3}{ac} - \frac{b^2x}{c^2} = \frac{x^2}{c}$ wird, wenn man mit c multiplicirt, $\frac{b^3}{a} - \frac{b^2x}{c} = x^2$.

3. Eben dies gilt auch von zusammengesetzten Factoren.

Aus $y^3 - 2cy^2 + by^2 + 3bcy - b^2c = 0$ wird II. §. 34. wenn man mit $y - b$ dividirt, $y^2 + 2cy - bc = 0$.

4. Ist eines der Glieder ein Bruch, welcher im Nenner die unbekannte Größe hat, und sich auf vorige Art nicht reduciren läßt: so wird die Gleichung mit solchem Nenner selbst, oder mit einem Divisor dieses Nenners multiplicirt.

Aus $\frac{ax}{a - x} + b = x$ wird, wenn man mit $a - x$ multiplicirt, $ax + ab - bx = ax - x^2$, und nach num. 1. $ab - bx = -x^2$, oder $x^2 - bx + ab = 0$. Aus $\frac{a^3 - ab^2}{2cy - c^2} = y - c$ wird, wenn man mit $2y - c$ multiplicirt, $\frac{a^3 - ab^2}{c} = 2y^2 - 3cy + c^2$.

Digitized by Google

5. Ist eines der Glieder, welches die unbekannte Größe enthält, irrational: so schaffe man alle übrige Glieder auf die andre Seite, und erhebe die Gleichung in eine Potenz, welche mit der Wurzel des irrationalen Gliedes einerley Exponenten hat.

Aus $\sqrt{(a^2 - ax)} = x - a$ wird, wenn man quadrirt $a^2 - ax = x^2 - 2ax + a^2$, und nach num. 1. $o = x^2 - ax = x - a$. Aus $\sqrt[3]{(a^2x + 2ax^2 - x^3)} = a - x$ wird, wenn man cubirt, $a^2x + 2ax^2 - x^3 = a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$, und nach num. 1. $4a^2x - ax^2 - a^3 = o$, und nach num. 2. $4ax - x^2 - a^2 = o$, oder $x^2 - 4ax + a^2 = o$. Aus $y = \sqrt{ay + y^2} - a\sqrt{(ay - y^2)}$ wird, wenn man quadrirt, $y^2 = ay + y^2 - a\sqrt{(ay - y^2)}$ und nach num. 1. $a\sqrt{(ay - y^2)} = -ay$, und wenn man abermals quadrirt, $a^2(ay - y^2) = a^2y^2$, und nach num. 1. $a - y = y$, oder $a = 2y$.

6. Ist die Gleichung geordnet, und hat die unbekannte Größe in der höchsten Potenz einen Coëfficienten: so wird die Gleichung mit solchem Coëfficienten dividirt.

Aus $\frac{bx}{a} = a$ wird, wenn man mit $\frac{b}{a}$ dividirt, das ist, mit $\frac{a}{b}$ multiplicirt $x = \frac{a^2}{b}$. Aus $(2ac - c^2)x^3 + (a^3 + a^2c)x^2 + (ac - 2ac)x - a^3c^2 = o$ wird, wenn man mit $(2ac - c^2)$ dividirt, $x^3 + \frac{a^3 + a^2c}{2ac - c^2} \cdot x^2 + a^2x - \frac{a^3c^2}{2ac - c^2} = o$.

7. Ist eine gemischte Gleichung unvollständig: so läßt sie sich bisweilen zu einem niedrigern Grade bringen, indem man sie nach num. 2. reducirt, oder indem man

Digitized by Google

man der unbekannten Größe eine andre von geringerm Grade substituirt.

Aus $x^4 - mx^2 = o$ wird, wenn man mit x^2 dividirt, $x^2 - m = o$. Aus $x^4 - qx^2 - r$ wird, wenn man $y = x^2$ setzt, $y^2 - qy - r = o$.

§. 6.

Eine Gleichung wird transformirt, wenn solche mehrere unbekannte Größen enthält, und man dieselbe durch Hülfe mehrerer Gleichungen auf eine neue Gleichung bringt, worinn weniger unbekannte Größen sind. Solche Operation heißt auch die Elimination der unbekannten Größen. Da durch jede Hülfsgleichung eine von den unbekannten Größen eliminirt werden kann: so werden sie alle bis auf eine eliminirt, wenn man so viele Gleichungen hat, als unbekannte Größen vorhanden sind.

Zusatz. Sollte sich durch zwey Gleichungen mehr als eine unbekannte Zahl eliminiren lassen: so ist dies ein Zeichen, entweder daß in den Bedingungen der Frage ein Fehler verborgen sey, oder daß der Fehler in den Gleichungen selbst liege. Z. E. Man habe die beyden Gleichungen $ax - by = ab - az$, und $bx + by = b^2 + az$: so entsteht, wenn man Gleiches zu Gleichem addirt, $ax + bx = ab + b^2$, so daß y und z eliminirt sind; welches daher einen Fehler verräth.

§. 7.

Aufgabe. Es sind zwey Gleichungen für zwey unbekannte Größen gegeben; man soll eine der unbekannten Größen, wenn sie in der ersten Dimension vorkommt, eliminiren.

Man bestimme den Werth solcher unbekannten Größe entweder nach beyden Gleichungen, und setze den einen

Werth dem andern gleich; oder nur nach der einen Gleichung, und bringe den so bestimmten Werth in die andre Gleichung.

Erstlich: Die Elimination durch Gleichsetzung des Werthes.

Man habe die beyden Gleichungen $a + x = b + y$, und $2x + y = 3b$: so giebt die erstere $y = a + x - b$, und die zweyte $y = 3b - 2x$, folglich $a + x - b = 3b - 2x$, folglich $3x + a - 4b = 0$. Eben dies erhält man, wenn man den einen Werth von dem andern subtrahirt, welches weil beyde gleich sind, Null giebt.

Ferner habe man die Gleichungen $ax - 2by = ab$, und $xy = b^2$: so ist $y = \frac{ax - ab}{2b} = \frac{b^2}{x}$; folglich, wenn man mit $2b$ und mit x multiplicirt, $ax^2 - abx = 2b^3$, folglich $x^2 - bx - \frac{2b^3}{a} = 0$.

Weiter habe man die Gleichungen $\frac{b^2x - aby}{a} = ab + xy$, und $bx + \frac{ay^2}{c} = 2a^2$: so ist, wenn man solche reducirt, die erste $b^2x - ayx = a^2b + aby$, und die zweyte $bcx = 2a^2c - ay^2$; folglich $x = \frac{a^2b + aby}{b^2 - ay} = \frac{2a^2c - ay^2}{bc}$; folglich $y^3 - \frac{b^2}{a}y^2 - \frac{2a^2c - b^2c}{a}y + b^2c = 0$.

Zweytens: Die Elimination durch Substitution des Werthes.

Man habe die beyden Gleichungen $xy^2 = b^3$, und $x^2 + y^2 = by - ax$: so giebt die erste $x = \frac{b^3}{y^2}$. Bringt man diesen Werth statt x in die zweyte Gleichung: so erhält

Digitized by Google

erhält man $\frac{b^6}{y^4} + y^2 = by - \frac{ab^3}{y^2}$; folglich, wenn man mit y^4 multiplicirt, $b^6 + y^6 = by^5 - ab^3y^3$; folglich $y^6 - by^5 + ab^3y^2 + b^6 = 0$.

Ferner habe man die Gleichungen $ay^2 + a^2y = z^3$, und $yz - ay = az$: so giebt die zweyte $y = \frac{az}{z-a}$. Bringt man diesen Werth statt y in die erste Gleichung: so erhält man $\frac{a^3z}{z^2-a^2} + \frac{a^3z}{z-a} = z^3$; folglich mit z dividirt, $\frac{a^3z}{(z+a)(z-a)} + \frac{a^3}{z-a} = z^2$, und mit $z - a$ multiplicirt, $\frac{a^3z}{z+a} + a^3 = z^3 - az^2$, und mit $z + a$ multiplicirt, $a^3z + a^3z + a^4 = z^4 - a^2z^2$; folglich $z^4 - a^2z^2 - 2a^3z - a^4 = 0$.

Zusatz. Zuweilen findet man viel kürzere Wege zur Elimination. Z. E. wenn man die beyden Gleichungen $ax = \frac{b^2x - b^3}{z}$, und $x = \frac{az}{x-b}$ mit einander multiplicirt: so erhält man $ax^2 = \frac{b^2(x-b)}{z} \cdot \frac{az}{x-b} = ab^2$, folglich $x = b$.

§. 8.

Aufgabe: Es sind zwey Gleichungen für zwey unbekannte Größen, die beyde in einer höhern Dimension vorkommen, gegeben; man soll eine derselben eliminiren.

Erstlich. Ist die höchste Dimension der zu eliminirenden Größe in beyden Gleichungen einerley: so erhält man, wenn man ihren Werth durch jede der beyden Gleichungen bestimmt, eine neue Gleichung, worin obgedachte höchste Dimension vermindert ist. Wiederholt

Digitized by Google

man, wenn es nöthig ist, diese Operation bis man die unbekannte Größe auf die erste Dimension gebracht hat, und setzt alsdenn ihren Werth, den sie nach der zuletzt gefundenen Gleichung hat, in eine der anfänglich gegebenen Gleichungen: so wird solche unbekannte Größe alsdenn eliminirt seyn.

Man habe die Gleichungen $x^2 + 5x = 3y^2$, und $2xy - 3x^2 = 4$: so ist $x^2 = 3y^2 - 5x = \frac{2xy - 4}{3}$, folglich $9y^2 - 15x = 2xy - 4$, folglich $9y^2 + 4 = (2y + 15)x$, folglich $x = \frac{9y^2 + 4}{2y + 15}$, welchen Werth man in eine der anfänglichen Gleichungen statt x bringt.

Zweytens. Ist solche höchste Dimension in beyden Gleichungen nicht einerley: so multiplicirt man die Gleichung, worinn die geringere Dimension ist, mit einer solchen Potenz der zu eliminirenden Größe, daß dieselbe mit der ersten einerley Dimension erhält, und verfährt alsdenn nach dem ersten Falle.

Man habe z. E. $y^3 = xy^2 + 3x$, und $y^2 = x^2 - xy - 3$: so wird aus letzterer, wenn man sie mit y multiplicirt, $y^3 = x^2y - xy^2 - 3y$; folglich $xy^2 + 3x = x^2y - xy^2 - 3y$. Mit dieser und der einfachern von den beyden anfänglichen Gleichungen verfährt man, wie beym ersten Falle.

Zusatz. Zuweilen kann man auch hier kürzere Wege finden. Man habe z. E. $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 140$, und $x + y + \frac{y^2}{x} = 20$: so wird aus letzterer, wenn man y subtrahirt, $x + \frac{y^2}{x} = 20 - y$, und quadrirt, $x^2 + 2y^2 + \frac{y^4}{x^2}$

Digitized by Google

$\frac{y^4}{x^2} = 400 - 40y + y^2$, und hieraus, wenn man y^2 subtrahirt, $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 400 - 40y$. Nun war nach der anfänglichen ersten Gleichung $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 140$. Folglich ist $400 - 40y = 140$, oder $\frac{400 - 140}{40} = y$.

§. 9.

Aufgabe: Es sind drey und mehrere Gleichungen für eben so viel unbekannte Größen gegeben; man soll sie alle bis auf eine eliminiren.

Man suche den Werth der ersten unbekannten Größe in der ersten Gleichung, und setze denselben in die übrigen Gleichungen. Eben so verfahre man mit der zweyten, dritten und den übrigen unbekannten Größen.

Man habe z. E. $ax = yz$, und $x + y = z$, und $5x = y + 3z$: so ist nach der ersten Gleichung $x = \frac{yz}{a}$, folglich $\frac{yz}{a} + y = z$, und $\frac{5yz}{a} = y + 3z$, und demnach x eliminirt. Eben so eliminire man auch z.

Zusatz. Mittelst dieser Methode lassen sich auch jede irrationale Glieder aus einer Gleichung bringen, wenn man sie beliebigen Buchstaben gleich setzt; wodurch man eben so viele Gleichungen erhält, mittelst deren man die angenommenen Buchstaben eliminiren kann.

Man habe z. E. $\sqrt{ay} - \sqrt{(a^2 - ay)} = 2a + \sqrt[3]{ay^2}$, und setze $\sqrt{ay} = p$; $\sqrt{(a^2 - ay)} = q$; $\sqrt[3]{ay^2} = r$: so hat man $p - q = 2a + r$; $ay = p^2$; $a^2 - ay = q^2$; $ay^2 = r^3$, und kann p, q, r, eine nach der andern eliminiren. §. 8.

Digitized by Google

§. 10.

Eine Gleichung wird formirt, wenn man eine vorgelegte Aufgabe oder Frage genau zergliedert, alle Bedingungen und Angaben derselben von einander absondert, und solche mit allgemeinen Ausdrücken bezeichnet, wozu die allgemeine Arithmetik, besonders das erste Kapitel von der Buchstabenrechnung, und vorzüglich das erste Stück von der allgemeinen Bezeichnung der Größen, hinreichende Mittel angiebt.

Zusatz. Diese Operation ist eine Art der Uebersetzung, indem man das, was in der Wortsprache ausgedrückt ist, in die Sprache der allgemeinen Zeichen überträgt; wobey es denn ebenfalls geschiehet, daß sich manches auf verschiedene Arten geben läßt, worunter eine netter als die andre ist. Auch trift es sich öfters, daß man, so wie in Sprachen, deren jede ihr eigenthümliches hat, vieles nicht den Worten, sondern dem Sinne nach übersetzen muß. Besonders hat man bey dieser Art der Uebersetzung noch dahin zu sehen, daß man nicht mehrere unbekannte Größen, als die unumgängliche Nothwendigkeit erfordert, in die Gleichung bringe. Von allen diesen und andern dergleichen Regeln werden die Aufgaben in dem Folgenden lehrende Beyspiele geben, bey denen man auf die angebrachte Methode in Formirung der Gleichungen vorzüglich aufmerksam seyn muß.

§. 11.

Eine Gleichung wird aufgelöst, wenn man solche auf die allereinfachste Form bringt, worinn die unbekannte und gesuchte Größe von allen bekannten und gegebenen Größen gänzlich abgesondert ist. Durch solche Reduction findet man einen Werth, welcher für die unbekannte Größe in die Gleichung gebracht, solche in Null verwandelt. Diesen Werth nennt man

Digitized by Google

man auch die Wurzel der Gleichung, welche man also durch die Auflösung oder Solution erhält.

Anmerkung. Bisher giebt die Algebra bestimmte allgemeine Regeln der Solution nur für alle reine Gleichungen von jeder Dimension, und für die gemischten quadratischen Gleichungen; welches auch in den meisten und gewöhnlichsten Fällen hinreichend ist. Für die höhern gemischten Gleichungen hat man auch angefangen, Theorien, besonders über die Natur der Wurzeln einer Gleichung, zu gründen, welche aber in den ersten Elementen der Algebra noch ausgesetzt bleiben. In diesen Theorien wird unter andern auch bewiesen, daß in jeder Gleichung so viel Wurzeln vorhanden sind, als Dimensionen die Gleichung hat.

II. Reine Gleichungen.

§. 12.

Die allgemeine Form aller reinen Gleichungen ist $x^m = A$; daher $x = \sqrt[m]{A}$, oder $m \lg x = \lg A$, folglich $\lg x = \frac{\lg A}{m}$ ist. Je nachdem nun der Exponent m die Zahlen 1, 2, 3, 4. u. s. w. bedeutet, ist auch die Gleichung einfach, quadratisch, cubisch, biquadratisch u. s. w.

§. 13.

Aufgabe: Ein Kaufmann nimmt jährlich zur Bestreitung seines Hauswesens 100 ℔ von seinem Vermögen, und vermehrt das übrige um $\frac{1}{3}$. Nach 3 Jahren ist er noch einmal so reich. Wie groß ist sein Kapital?

Das anfängliche Kapital sey x. Im ersten Jahre nimmt er davon 100 ℔, bleibt $x - 100$. Dies vermehrt

Digitized by Google

mehrt er um $\frac{1}{3}$, macht $x - 100 + \frac{x-100}{3} = \frac{4x-400}{3}$.

Im zweyten Jahre nimmt er davon 100 ℔, bleibt $\frac{4x-400}{3} - 100 = \frac{4x-700}{3}$. Dies vermehrt er um $\frac{1}{3}$, macht $\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-2800}{9}$.

Im dritten Jahre nimmt er davon 100 ℔, bleibt $\frac{16x-2800}{9} - 100 = \frac{16x-3700}{9}$. Dies vermehrt er um $\frac{1}{3}$, macht $\frac{16x-3700}{9} + \frac{16x-3700}{27} = \frac{64x-14800}{27}$. Dies beträgt zweymal so viel als das anfängliche Kapital, oder $2x$. Demnach ist $\frac{64x-14800}{27} = 2x$.

Da $\frac{64x-14800}{27} = 2x$; so ist $64x - 14800 = 54x$, folglich $(64 - 54)\,x = 14800$, folglich $x = \frac{14800}{10} = 1480$ ℔.

§. 14.

Aufgabe: Es ist die Summe a und das Product b zweyer Zahlen gegeben; man soll die Zahlen selbst finden.

Da man die Summe weiß, so braucht man IV. §. 49. nur noch die Differenz, um die beyden Zahlen zu wissen. Es sey daher die Differenz x: so ist die größere der gesuchten Zahlen $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x$, und die kleinere $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x$; folglich ihr Product $b = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}x^2$, folglich $x^2 = a^2 - 4b$, folglich $x = \sqrt{(a^2 - 4b)}$.

§. 15.

Digitized by Google

§. 15.

Aufgabe: Eine Größe a verwandelt sich durch Wachsen oder Abnehmen innerhalb eines Jahres in x. Diese Größe x verwandelt sich im andern Jahre nach eben dieser Verhältniß; und so fort in jedem Jahre. Nach n Jahren ist aus a die Größe b geworden; man soll x finden.

Nach zwey Jahren ist $a : x = x : \frac{x^2}{a}$. Nach drey Jahren $a : x = \frac{x^2}{a} : \frac{x^3}{a^2}$; folglich nach 4 Jahren $\frac{x^4}{a^3}$, und daher nach n Jahren $\frac{x^n}{a^{n-1}} = b$, folglich $x^n = b \cdot a^{n-1}$, folglich $x = \sqrt[n]{(b \cdot a^{n-1})}$.

Z. E. In einer Stadt war die Anzahl der Menschen 10000, welche in 15 Jahren zu 20000 angewachsen ist. Man setzt den Anwachs alle diese Jahre über gleichförmig, und frägt, in welcher Verhältniß der Anwachs geschehen ist. Da denn $\log. x = \frac{\log. 20000 + 14 \log. 10000}{15}$.

§. 16.

Aufgabe: Man soll drey Zahlen finden, wenn die Summe eines jeden Paars derselben gegeben ist. Die Summe der ersten und zweyten Zahl sey a, der ersten und dritten b, der zweyten und dritten c.

Nennt man die Summe aller drey Zahlen x: so ist offenbar $x - a$ die dritte, $x - b$ die zweyte, $x - c$ die erste; folglich $(x - a) + (x - b) + (x - c) = x$; folglich $2x = a + b + c$, und $x = \frac{a + b + c}{2}$.

§. 17.

Digitized by Google

§. 17.

Aufgabe: Aus zwey Röhren fließt Wasser gleichförmig in ein Gefäß. Man läßt die erstere Röhre a Stunden, die andere b Stunden sich ergießen, und findet im Gefäß c Eymer. Ein andermal ergießt sich die erste Röhre d Stunden, die andere e Stunden, und man findet im Gefäß f Eymer. Man soll bestimmen, wie viel Eymer in der Stunde jede Röhre giebt.

Die erste gebe stündlich x, die andere y Eymer: so gab das einemal die erste ax, die andere by Eymer; das andremal die erste dx, die andre ey Eymer. Folglich ist $ax + by = c$, und $dx + ey = f$. Nach der ersten Gleichung ist $x = \frac{c - by}{a}$. Dieser Werth statt x in die zweyte Gleichung gebracht, giebt $\frac{cd - bdy}{a} + ey = f$, folglich $cd - bdy + aey = af$, folglich $(ae - bd)\,y = af - cd$, und $y = \frac{af - cd}{ae - bd}$. Dieser Werth statt y in die erste Gleichung gebracht, giebt $ax = c - \frac{abf - bcd}{ae - bd} = \frac{ace - bcd - abf + bcd}{ae - bd}$, folglich $x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$.

Z. E. Es sey $a = 2$, $b = 3$, $c = 21$, $d = 7$, $e = 6$, $f = 51$: so ist $x = \frac{126 - 153}{12 - 21} = \frac{-27}{-9} = 3$, und $y = \frac{102 - 147}{12 - 21} = \frac{-45}{-9} = 5$. Wäre hingegen $a = 6$, $b = 4$, $c = 22$, $d = 9$, $e = 7$, $f = 31$: so wäre $x = \frac{154 - 124}{42 - 36} = \frac{30}{6} = 5$, und $y = \frac{186 - 198}{42 - 36} = \frac{-12}{6} = -2$; welches anzeigt, daß die eine Röhre jede Stunde 5 Eymer in das Gefäß schüttet, aus welchem durch

durch die andre Röhre stündlich zwey Eymer fließen. Diesen Umstand hätte man auch in die anfänglichen Gleichungen mit hinein bringen können.

§. 18.

Aufgabe: Es ist der Preis von verschiedenen aus einerley Dingen bestehenden Mischungen, nebst den Verhältnissen, nach welchen diese Dinge gemischt sind, gegeben; man soll den Preis eines jeden dieser Dinge finden.

Die Dinge A, B, C, sind in der ersten Mischung nach den Verhältnissen d, g, l; in der zweyten nach den Verhältnissen e, h, m; in der dritten nach den Verhältnissen f, k, n. Der Preis der ersten Mischung sey p, der zweyten q, der dritten r. Nennt man nun die Preise von A, B, C, x, y, z: so ist $dx + gy + lz = p$; $ex + hy + mz = q$; $fx + ky + nz = r$. Aus der ersten Gleichung folgt $x = \frac{p - gy - lz}{d}$, aus der zweyten $x = \frac{q - hy - mz}{e}$; aus der dritten $x = \frac{r - ky - nz}{f}$. Verbindet man von diesen neuen Gleichungen die erste und zweyte, desgleichen die zweyte und dritte; so erhält man 1) $ep - egy - elz = dq - dhy - dmz$, folglich $\frac{ep - dq + dmz - elz}{eg - dh} = y$, und wenn man $ep - dq = \alpha$, $dm - el = \beta$, $eg = dh = \gamma$ setzt, $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = y$. 2) $fq - fhy - fmz = er - eky - enz$, folglich $\frac{fq - er + enz - fmz}{fh - ek} = y$, und wenn man $fq - er = \delta$, $en - fm = \zeta$, $fh - ek = \theta$ setzt,

setzt, $\frac{\delta + \zeta z}{\theta} = y$. Verbindet man die beyden letzten Gleichungen: so erhält man $\alpha\theta + \beta\theta z = \gamma\delta + \gamma\zeta z$, folglich $\frac{\alpha\theta - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = z$. Hieraus läßt sich $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = y$, und hierauf auch $\frac{p - gy - lz}{d} = x$ bestimmen.

Z. E. Es kaufte Jemand 40 Scheffel Weitzen, 24 S. Gersten, 20 S. Hafer, zusammen für 15 ℔ 12 ßl. oder für $15\frac{3}{5}$ ℔; ferner 26 S. W. 30 S. G. 50 S. H. zusammen für 16 ℔; ferner 24 S. W. 120 S. G. 100 S. H. zusammen für 34 ℔: so geben obige Formeln, wenn man diese Zahlen statt der Buchstaben setzt, den S. W. zu 5, den S. G. zu 3, und den S. H. zu 2 ßl. im Durchschnitt.

Anmerkung. Wenn man diese Aufgabe umkehrt, und aus den festgesetzten Preisen die Verhältnisse der Mischungen findet: so nennen dies die gemeinen Rechenmeister die Alligationsregel. II. §. 91.

III. Gemischte quadratische Gleichungen.

§. 19.

Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung ist $x^2 - px - q = 0$; worinn die Wurzel x gleich ist, dem mit dem entgegengesetzten Zeichen belegten halben Coëfficienten des zweyten Gliedes, nebst der mit beyden Zeichen belegten Quadratwurzel aus der Summe des mit dem entgegengesetzten Zeichen belegten dritten Gliedes und des Quadrats obgedachten halben Coëfficientens. Oder $x = \frac{1}{2}p \mp \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$.

Denn da $x^2 - px = q$: so ist $x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$; folglich $x - \frac{1}{2}p = \mp\sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$, folglich

x

Digitized by Google

$x = \frac{1}{2}p \mp r(q + \frac{1}{4}p^2)$. Auch auf folgende Art kann der Beweis geführt werden. Man setze $x = y + \frac{1}{2}p$, und bringe diesen Werth anstatt x in die Gleichung: so ist $x^2 = y^2 + py + \frac{1}{4}p^2$, und $px = py + \frac{1}{2}p^2$, folglich $x^2 - px - q = y^2 + py + \frac{1}{4}p^2 - py - \frac{1}{2}p^2 - q = 0$, folglich $y^2 - \frac{1}{4}p^2 - q = 0$, folglich $y^2 = q + \frac{1}{4}p^2$, folglich $y = \mp r(q + \frac{1}{4}p^2)$. Nun war $x = y + \frac{1}{2}p$. Folglich ist $x = -\frac{1}{2}p \mp r(q + \frac{1}{4}p^2)$.

Zusatz. Jede Gleichung von der Form $x^{2m} - px^m - q = 0$, kann nach der Art der quadratischen Gleichungen aufgelößt werden. Denn setzt man $x^m = y$: so ist $y^2 - py - q = 0$; folglich $x^m = y = \frac{1}{2}p \mp r(q + \frac{1}{4}p^2)$; folglich $x = \sqrt[m]{\frac{1}{2}p \mp r(q + \frac{1}{4}p^2)}$.

§. 20.

Aufgabe. Man soll vier stetig proportionirte Zahlen finden, so daß die Summe der beyden mittlern 12, der beyden äussern aber 20 betrage.

Nennt man die zweyte dieser Zahlen x: so ist die dritte $12 - x$, folglich die erste $\frac{x^2}{12-x}$, und die vierte $\frac{144 - 24x + x^2}{x}$. Demnach hat man $\frac{x^2}{12-x} + \frac{144 - 24x + x^2}{x} = 20$, oder $\frac{144 - 24x + x^2}{x} = 20 - \frac{x^2}{12-x}$; folglich $144 - 24x + x^2 = 20x - \frac{x^3}{12-x} = \frac{240x - 20x^2 - x^3}{12-x}$; folglich $1728 - 432x + 36x^2 - x^3 = 240x - 20x^2 - x^3$; folglich $1728 - 672x + 56x^2 = 0$; folglich $3\frac{5}{7} - 12x + x^2 = 0$, oder $x^2 - 12x + 3\frac{5}{7} = 0$. Demnach ist $x = 6 \mp r(-3\frac{5}{7} + 36)$. Aus dieser zweyten Zahl x ergeben sich denn nach dem obigen die übrigen verlangten Zahlen.

Digitized by Google

§. 21.

Aufgabe. Man soll drey stetig proportionirte Zahlen finden, wenn die Summe derselben 20, und die Summe ihrer Quadrate 140, gegeben ist.

Nennt man die beyden ersten dieser gesuchten Zahlen x, y: so ist die dritte $\frac{y^2}{x}$; folglich $x + y + \frac{y^2}{x} = 20$; folglich $x^2 + yx + y^2 = 20x$; folglich $x^2 + (y - 20)x + y^2 = 0$, folglich $x = 10 - \frac{1}{2}y + \sqrt{(100 - 10y - \frac{3}{4}y^2)}$. Subtrahirt man diesen Werth der ersten Zahl x, und die zweyte Zahl y, von 20: so bleibt die dritte Zahl $\frac{y^2}{x} = 10 - \frac{1}{2}y - \sqrt{(100 - 10y - \frac{3}{4}y^2)}$. Macht man nun die Quadrate dieser drey Zahlen, und addirt solche: so erhält man $400 - 40y = 140$, folglich $y = 6\frac{1}{2}$. Bringt man diesen Werth anstatt y in die vorher gefundne Gleichung für x: so erhält man $x = 6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$, folglich nach obigen die dritte Zahl $= 6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$.

Anmerkung 1. Für cubische und biquadratische Gleichungen sind schon im sechzehnten Jahrhunderte Auflösungen gefunden worden; und zwar für erstere vom Scipio Ferreo, welche Cardan, für letztre von Lud. Ferrari, welche Bombelli bekannt machte. Daher heißen diese Methoden Cardans und Bombelli's Regeln.

2. Noch ist zu bemerken, wenn in einer quadratischen Gleichung von der Form $x^2 - px + q = 0$, $q > \frac{1}{4}p^2$ ist, daß alsdenn die Wurzeln unmöglich sind. Denn in solchem Falle hat man $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, wo $\frac{1}{4}p^2 - q$ negativ, folglich II. §. 49. die Quadratwurzel daraus unmöglich ist.

Zwey-

Digitized by Google

Zweytes Capitel.

Von den unbestimmten Aufgaben.

I. Natur der unbestimmten Aufgaben.

§. 22.

Werden in einer Aufgabe mehrere unbekannte Grössen gesucht, und zugleich Data genug ertheilt, um daraus so viel Gleichungen als unbekannte Grössen gefodert werden, zu formiren: so ist die Aufgabe bestimmt. Reichen hingegen die Data nicht zu eben so viel Gleichungen zu, als unbekannte Grössen vorhanden sind: so ist die Aufgabe unbestimmt. Im letztern Fall kann man für so viel unbekannte Grössen, als Gleichungen fehlen, willkührliche Werthe setzen; doch sind gemeiniglich in der Aufgabe Bedingungen enthalten, welche die Anzahl der willkührlichen Werthe, die sonst über alle Grenzen stiege, sehr einschränken. Die Lehre von Auflösung solcher unbestimmten Aufgaben heißt die unbestimmte Analytik, welche oft ganz besondre Kunstgriffe erfodert, und für Anfänger vorzüglich dient, ihren Verstand aufzuklären, und ihnen eine grössere Fertigkeit in analytischen Rechnungen zu verschaffen.

Zusatz. Zuweilen scheint es, als ob man so viele Gleichungen machen könne, als unbekannte Grössen gesucht werden; und die Aufgabe ist doch unbestimmt. Dieser Fall eräugnet sich, wenn einige Data verschieden zu seyn scheinen, die doch im Grunde nur ein und dasselbe

Digitized by Google

unter verschiedener Gestalt sind; welches sich aber wenigstens bey der Reduction der Gleichungen offenbaret. Z. E. man sucht zwey Zahlen, so, daß ein Viertel ihrer Summe 48, und die Hälfte samt einem Viertel ihrer Summe 144 betrage. Nennt man die Zahlen x, y: so ist $\frac{x+y}{4} = 48$ folglich $x = 192 - y$; und $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4})(x+y) = 144$, folglich $x = 192 - y$, das nemliche wieder. Demnach giebt die Aufgabe für die beyden unbekannten Zahlen in der That nur eine und dieselbe Gleichung, und ist also unbestimmt; welches man auch gleich anfangs hätte bemerken können. Denn wenn man sagt, der vierte Theil einer Grösse ist 48: so heißt dies mit andern Worten, die Hälfte samt einem Viertel, das ist, $\frac{3}{4}$ dieser Grösse ist 3mal 48, oder 144.

Anmerkung. Ueberhaupt macht das letzte Resultat bey Reduction der Gleichungen das unrichtige oder fehlerhafte in den Bedingungen der Aufgabe offenbar. Z. E. hätte eine Aufgabe auf die Gleichungen geführt, $2x + 3y = 20$, und $4x + 6y = 30$: so erhält man daraus $y = \frac{20 - 2x}{3} = \frac{30 - 4x}{6}$, folglich $120 - 12x = 90 - 12x$, oder $120 = 90$, welches unmöglich ist. Solte daher die Analysis nicht im Stande seyn, alle Fragen zu beantworten: so dient sie doch gewiß dazu, die Absurdität der Frage oder die Ignoranz des Fragenden zu verrathen.

§. 23.

Eine unbestimmte Aufgabe ist einfach, wenn die unbekannten Grössen nur in der ersten Dimension, auch nicht mit einander multiplicirt darinnen vorkommen; zusammengesezt hingegen, welche höhere Dimensio-

mensionen, oder auch Producte der unbekannten Größen enthält.

Zusatz 1. Diejenigen einfachen unbestimmten Aufgaben, wo man aus zwey Gleichungen drey oder auch mehrere unbekannte Grössen finden soll, werden von den gemeinen Rechenmeistern auf sehr mangelhafte Art unter dem barbarischen Namen *regula coeci* behandelt. (II. §. 91.)

2. Die unbestimmten Aufgaben, besonders die von der zusammengesetzten Art, begreift man auch unter dem Namen der diophantischen Analysis, weil Diophantus viele solche Aufgaben aufgelößt hat. Sie waren den Alten schätzbar, weil sie mittelst derselben die Irrationalzahlen eliminiren konnten.

§. 24.

Bey den einfachen unbestimmten Aufgaben kommt die Hauptsache darauf an, daß man von den gesuchten Grössen einige, welche man will, und so viele, als die Zahl der Gleichungen es verstattet, zugleich aber auch die Einschränkungen bestimme, denen die übrigen nicht zu bestimmenden unterworfen sind; daß man hierauf diesen übrigen alle mögliche Werthe, welche mit obgedachten Einschränkungen bestehen könne, beylege; daß man endlich diese Werthe in die bereits gefundnen Endgleichungen, einen nach den andern, übertrage, um der vorgelegten Aufgabe durch die verschiedenen möglichen Auflösungen ein Genüge zu leisten.

Zusatz. Es ist also nicht hinreichend, wie die so genannte regula coeci thut, eine oder ein Paar Antworten auf die Frage zu geben; sondern man muß, wie die unbestimmte Analytik lehret, ein vollständiges Register

Digitized by Google

aller möglichen Beantwortungen der vorgelegten Frage darstellen.

§. 25.

In den zusammengesetzten unbestimmten Aufgaben ist der leichtere Fall, daß die eine unbekannte Grösse y in der ersten, die übrigen aber, als x, in höhern Dimensionen vorkommen; der gewöhnlichere Fall aber, daß auch y und demnach alle unbekannte Grössen x u. s. w. in höhern Dimensionen vorhanden sind. Im ersten Falle hat man zwar Formeln zur Berechnung, sie sind aber, weil es sich nicht oft so trift, selten anzuwenden. Im zweyten Falle, kommt, wenn man y bestimmt, x u. s. w. in der zweyten und noch höhern Dimensionen hinter das Wurzelzeichen; da denn die Hauptsache und die größte Kunst der unbestimmten Analytik darauf beruhet, solche Werthe für x ausfündig zu machen, daß die Wurzelzeichen, oder die Irrationalität eliminirt werden.

Anmerkung. Mehreres von der Theorie der unbestimmten Analytik findet man unter andern in Leonhard Eulers vollständigen Anleitung zur Algebra. Was hier davon angeführt worden, soll nur dienen einen allgemeinen Begrif von diesem wichtigen Theile der Analysis zu geben, zu dessen Ausbildung nur noch einige Beyspiele in den nun folgenden Aufgaben gehören.

II. Einfache unbestimmte Aufgaben.

§. 26.

Aufgabe. Für 20 rthlr. sollen 20 Maaß Wein von viererley Sorten gekauft werden: Ungerscher p Maaß zu 4 rthlr. Champagner q M. zu 2 rthlr. Rheinwein r M. zu 1 rthl. und Franzwein s M. zu $\frac{1}{2}$ rthl.

Für

Für die 4 unbekannten Größen p, q, r, s, finden sich in der Aufgabe nur 2 Gleichungen. Denn der Preiß giebt $4p + 2q + r + \frac{1}{2}s = 20$, und die Quantität $p + q + r + s = 20$. Hieraus lassen sich zwey, welche man will, z. E. r und s, und für die beyden übrigen p und q, die nöthigen Einschränkungen bestimmen.

Die zweyte Gleichung von der ersten subtrahirt giebt $3p + q - \frac{1}{2}s = 0$, folglich $3p + q = \frac{1}{2}s$, oder $6p + 2q = s$. Die erste Gleichung giebt $r = 20 - 4p - 2q - \frac{1}{2}s$, oder wenn man den gefundenen Werth statt $\frac{1}{2}s$ setzt, $r = 20 - 7p - 3q = 20 - (7p + 3q)$. Folglich muß, wenn r eine positive ganze Zahl seyn soll, wie die Aufgabe fodert, $7p + 3q < 20$ seyn. Unter dieser Einschränkung setze man alle mögliche Werthe für p und q: so geben die gefundenen Gleichungen die Werthe für r und s, wie folget:

p.	q.	r.	s.
1.	1.	10.	8.
1.	2.	7.	10.
1.	3.	4.	12.
1.	4.	1.	14.
2.	1.	3.	14.

Anmerkung. Zur Erläuterung dieser Solution diene z. E. der fünfte Fall, wo man vom Ungerschen 2 Maaß und vom Champagner 1 Maaß nimmt, also $p = 2$, $q = 1$ setzt, welches verstattet wird, weil alsdenn $7p + 3q = 14 + 3 < 20$. Alsdenn aber ist nach den gefundnen Gleichungen $r = 20 - (7p + 3q) = 20 - 17 = 3$, und $s = 6p + 2q = 12 + 2 = 14$. Nimmt man daher vom Ungerschen 2, vom Champagner 1 Maaß: so muß man vom Rheinwein 3, und vom Franzwein 14 Maaß nehmen; welches zusammen 20 Maaß ausmacht, die nach dem angesetzten Preiße 20 rthl. betragen.

Digitized by Google

Wolte man hingegen vom Ungerschen 2 Maaß und vom Champagner auch 2 Maaß nehmen: so wäre $7p + 3q = 20$ gegen die Einschränkung. Dies kann zugleich den folgenden Solutionen zur Erläuterung dienen.

§. 27.

Aufgabe. Es sollen für 20 rthl. ein Dutzend Paar Strümpfe eingekauft werden; seidne p Paar zu 3 rthl., feine wollene q Paar zu 1 rthl. und baumwollene r Paar zu $\frac{1}{2}$ rthl.

Für die 3 unbekannten Grössen p, q, r, finden sich in der Aufgabe nur 2 Gleichungen. Denn der Preiß giebt $3p + q + \frac{1}{2}r = 20$, und die Quantität $p + q + r = 12$. Hieraus lassen sich zwey, etwa q und r, und für die dritte p die nöthigen Einschränkungen bestimmen. Die zweyte Gleichung von der ersten subtrahirt giebt $2p - \frac{1}{2}r = 8$, oder $4p - r = 16$, folglich $4p - 16 = r$, folglich, da r eine ganze positive Zahl seyn soll, $4p > 16$, oder $p > 4$. Setzt man den gefundenen Werth von r in die erste Gleichung: so erhält man $5p + q = 28$, folglich $q = 28 - 5p$, und daher $5p < 28$, oder $p < 5\frac{3}{5}$. Demnach muß $p = 5$ seyn. Dies giebt $q = 3$, und $r = 4$, folglich nach den Bestimmungen der Aufgabe nur eine mögliche Auflösung.

Anmerkung. Hätte man die Preiße gesetzt zu $3\frac{3}{5}$, 1, $\frac{2}{5}$: so hieße die erste Gleichung $3\frac{3}{5}p + q + \frac{2}{5}r = 20$, oder $11p + 3q + 2r = 60$. Subtrahirt man hievon die zweyte Gleichung doppelt $2p + 2q + 2r = 24$: so erhält man $9p + q = 36$, folglich $q = 36 - 9p$, und daher $9p < 36$, oder $p < 4$. Subtrahirt man die zweyte Gleichung von der ersten anfänglichen: so erhält man $2\frac{3}{5}p - \frac{1}{5}r = 8$, oder $8p - r = 24$, folglich $8p - 24 = r$, folglich $8p > 24$ oder $p > 3$. Nun war vorher $p < 4$. Daher

Digitized by Google

Daher ist unter diesen besondern Bestimmungen gar keine Auflösung möglich.

§. 28.

Aufgabe. Ein Münzmeister hat dreyerley Silber 14, 11, und 9 löthiges, und soll 30 Mark 12 löthiges daraus machen. Wie viel Mark muß er von jeder Sorte nehmen?

Er nehme von der ersten Sorte x, von der zweyten y, und von der dritten z Mark: so ist $x + y + z = 30$, oder $9x + 9y + 9z = 270$, die erste Gleichung. Nun wird diese Masse an Silber enthalten $14x + 11y + 9z$ Loth und wiegt 30 Mark, wovon jede 12 Loth Silber enthalten soll, folglich zusammen 360 Loth. Demnach hat man die zweyte Gleichung $14x + 11y + 9z = 360$. Subtrahirt man davon die erste: so erhält man $5x + 2y = 90$, folglich $2y = 90 - 5x$, oder $y = 45 - \frac{5}{2}x$, folglich x eine gerade Zahl und $\frac{5}{2}x < 45$, oder $5x < 90$, und daher $x < 18$. Es war aber nach der ersten Gleichung $z = 30 - x - y$, folglich, den gefundnen Werth für y gesetzt, $z = 30 - x - 45 + \frac{5}{2}x = \frac{3}{2}x - 15$, folglich $\frac{3}{2}x > 15$, oder $3x > 30$, und daher $x > 10$. Soll also x gerade seyn und > 10, oder < 18: so kann x nichts anders seyn, als entweder 12, oder 14, oder 16. Daher ist nach den gefundenen Gleichungen

x	y	z
12.	15	3
14.	10	6
16.	5	9

III. Zusammengesetzte unbestimmte Aufgaben.

§. 29.

Aufgabe. Man soll zwey Quadratzahlen finden, deren Differenz auch eine Quadratzahl ist.

Digitized by Google

Ist x die halbe Summe der beyden gesuchten Zahlen, und y ihre halbe Differenz: so ist die grössere $x+y$, und die kleinere $x-y$. Nennt man nun die Differenz ihrer Quadrate z^2: so ist $(x+y)^2-(x-y)^2=z^2$, oder $4xy=z^2$, folglich $xy=\frac{z^2}{4}$. Es ist aber z^2 sowohl als 4, folglich der ganze Bruch, folglich auch xy ein Quadrat. Demnach nehme man eine jede Quadratzahl, die sich in ungleiche Factoren zerlegen läßt, z. E. $36=9.4$, so ist die gesuchte grössere Zahl $=9+4=13$, und die kleinere $=9-4=5$, und allemal (13^2-5^2) eine Quadratzahl.

§. 30.

Aufgabe. Man soll eine Quadratzahl x^2 finden, welche von einer gegebenen Quadratzahl a^2, subtrahirt, zur Differenz eine Quadratzahl y^2, habe.

Hiernach ist $a^2-x^2=y^2$. Nun sey $y=a-px$: so ist $a^2-x^2=a^2-2apx+p^2x^2$, folglich $x^2=2apx-p^2x^2$, oder $x=2ap-p^2x$, folglich $x+p^2x=(1+p^2)x=2ap$, folglich $x=\frac{2ap}{1+p^2}$. Nun nehme man a und p wie man will, nur rational, so wird auch x, folglich auch y rational werden.

Z. E. Es sey $a=10$, $p=\frac{1}{2}$: so ist $x=\frac{10}{1+\frac{1}{4}}=\frac{40}{5}=8$, und $y=10-4=6$, auch $100-64=36$. Es sey $a=7$, $p=3$: so ist $x=\frac{2.7.3}{1+9}=4$, u. s. w.

§. 31.

Digitized by Google

§. 31.

Aufgabe. Man soll eine Quadratzahl x^2, finden, welche zu einer gegebnen Quadratzahl a^2, addirt, zur Summe eine Quadratzahl y^2, habe.

Hiernach ist $a^2 + x^2 = y^2$. Man setze $y = p + x$: so ist $a^2 + x^2 = p^2 + 2px + x^2$, folglich $a^2 - p^2 = 2px$, und $\frac{a^2 - p^2}{2p} = x$.

Z. E. Es sey $a = 8$, $p = 2$; so ist $x = \frac{60}{4} = 15$, und $y = 17$, auch $8^2 + 15^2 = 17^2$.

§. 32.

Aufgabe. Man soll zwey Quadratzahlen finden, deren Summe auch eine Quadratzahl ist; doch sollen alle ganze Zahlen seyn.

Es sey $x^2 + y^2 = z^2$, folglich $y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$, folglich $z + x > y$. Es sey daher $z + x = ny$, wo n eine ganze Zahl seyn muß: so ist $z - x = \frac{y}{n}$. Setzt man nun $\frac{y}{n} = m$, so ist $y = nm$, und $ny = n^2m$. Nun ist $z = \frac{z + x}{2} + \frac{z - x}{2}$. Folglich ist $z = \frac{n^2m}{2} + \frac{m}{2} = \frac{n^2 + 1}{2}m$. Eben so ist auch $x = \frac{z + x}{2} - \frac{z - x}{2} = \frac{n^2m}{2} - \frac{m}{2} = \frac{n^2 - 1}{2}m$. Da nun z und x ganze Zahlen seyn sollen: so müssen sich die Zähler der Brüche mit 2 dividiren lassen. Ist daher m ungerade, so muß $n^2 \mp 1$ gerade, folglich n ungerade seyn; ist aber m gerade, so kann $n^2 \mp 1$, folglich auch n, gerade oder ungerade seyn.

Wäre

Wäre z. E. $m = 1$, folglich ungerade: so kann man für n alle ungerade Zahlen setzen. Alsdenn aber ist

$y = mn =$ 1, 3, 5, 7, 9, 11 ....

$x = \frac{n^2 - 1}{2} m =$ 0, 4, 12, 24, ...

$z = \frac{n^2 + 1}{2} m =$ 1, 5, 13 ....

Wäre hingegen $m = 2$, folglich gerade: so kann man für n jede ganze Zahl setzen. Alsdenn ist

$y = mn =$ 2, 4, 6, 8, 10 ....

$x = (n^2 - 1)\frac{m}{2} =$ 0, 3, 8, 15, ...

$z = (n^2 + 1)\frac{m}{2} =$ 2, 5, 10, 17, ...

Zwey-

Digitized by Google

Zweyter Abschnitt.
die analytische Geometrie.

1. Von den bestimmten Aufgaben.
2. Von den unbestimmten Aufgaben.

Erstes Kapitel.
Von den bestimmten Aufgaben.

I. Grundlehren.

§. 1.

Die analytische Geometrie hat ausgedehnte Grössen, die Algebra hingegen Zahlen, oder auch allgemeine Grössen, zum Gegenstande. Werden die Aufgaben für ausgedehnte Grössen nur durch Linien aufgelößt: so heißt dies die geometrische Analysis, oder die geometrische Auflösung der Aufgaben; werden sie hingegen durch Gleichungen, statt der Linien, aufgelößt: so heißt dies die algebraische Auflösung der Aufgaben.

Zur geometrischen Auflösung wird erfodert, daß man die über ausgedehnte Grössen vorgelegte Frage, in die darinn enthaltenen einfachen Fragen zerlege; jede derselben, mit Ausschliessung der Arithmetik und Algebra, nur mittelst der reinen Geometrie durch Verzeichnung gewisser Linien beantworte; und durch Verbindung aller dieser einzelnen Antworten der vorgelegten Frage ein Genüge leiste. Dies war vorzüglich das Geschäfte der alten Geometer,

Digitized by Google

Geometer, welche auf diesem Wege, den wir auch noch oft, selbst bey algebraischen Arbeiten, betreten müssen, zu ihrem synthetischen Vortrage gelangten, dem die in Geheim gebrauchten Kunstgriffe nicht mehr anzumerken waren.

Zur algebraischen Auflösung wird erfodert, daß man die ausgedehnten Grössen, von denen die Rede ist, als Zahlen, oder auch als allgemeine Grössen, ansehe; die einzelnen Fragen oder Bedingungen einer Aufgabe in Gleichungen bringe, welche statt der Zeichnung den einzelnen Bedingungen ein Genüge leisten; und alle diese Gleichungen durch die algebraischen Kunstgriffe so geschickt verbinde, daß dadurch das Gesuchte der Hauptfrage gänzlich bestimmt werde.

Die analytische Geometrie, wenn sich solche nur auf algebraische Auflösungen einschränkt, ist demnach nichts anders, als ein Theil der Algebra; oder vielmehr eine Anwendung der Algebra auf die Geometrie, das ist, eine Anwendung der Methode für allgemeine Fragen auf die geometrischen Fragen.

Anmerkung 1. Die erste unter den folgenden Aufgaben soll so behandelt werden, daß die hier gegebnen Begriffe sich vollends aufklären werden; wie denn überhaupt die folgenden Aufgaben den hiermit angefangenen Grundlehren zur Erläuterung dienen.

2. Mehreres von der Analysis der Alten findet man in Euklids Data übersetzt von Schwab. Stuttgardt. 1780. Einige Beyspiele von synthetischen und analytischen Beweisarten findet man in Euklids Elementen den fünf ersten Sätzen des dreyzehnten Buchs angehängt.

3. Oft hat man bey Auflösung geometrischer Aufgaben nicht nöthig, seine Zuflucht zur Algebra zu nehmen, sondern

Digitized by Google

sondern kann solche viel leichter aus den allgemein bekannten Eigenschaften der Figur herleiten; daher man dieses allemal erst versuchen muß, ehe man an den Calculus gehet. Zuweilen trift es sich auch, daß die Aufgaben Bedingungen enthalten, welche sich nicht algebraisch ausdrücken lassen; in welchem Falle man also genöthigt ist, die Solution blos aus geometrischen Betrachtungen herzuleiten.

§. 2.

Aufgabe. Eine geometrische Frage in eine Gleichung zu bringen.

Die Formirung einer Gleichung für ausgedehnte Grössen erfodert, daß man den ungefehren Entwurf einer Figur mache, worin man alle Grössen, die in der Aufgabe enthalten sind, bekannte so wohl, als unbekannte, als wenn letztre schon gefunden wären, verzeichne; daß man diese Grössen ohne Unterschied mit einander vergleiche, um zu erforschen, welche darunter geschickt sind, die übrigen zu bestimmen; und daß man diese als gegebene, die übrigen als gesuchte benenne, und solche, wie es ihre Beziehung auf einander mit sich bringt, mit algebraischen Ausdrücken belege. Zu allen diesen nimmt man die Hülfsmittel aus der ganzen Geometrie, und besonders aus der Lehre von der Aenlichkeit der Figuren, und von der Proportion beym Cirkel.

Zusatz. Bey geometrischen Aufgaben kommt es nicht nur auf die Grössen selbst, sondern oft auch auf ihre Lage an, welche man durch Winkel bestimmt. Sind Lagen einander entgegengesetzt: so werden solche durch das Zeichen des positiven und negativen von einander unterschieden.

§. 3.

Digitized by Google

§. 3.

Aufgabe. Einen Winkel mit in eine Gleichung zu bringen. Fig. 188.

Da die Grösse eines Winkels weder durch Linien, noch Flächen, noch Körper ausgedruckt werden kann; aber auch ein Winkel in der Gleichung nicht anders vorkommt, als in so fern man ihn mit einem andern Winkel vergleicht: so kann jedesmal anstatt des Winkels eine gewisse Verhältniß gebraucht werden, dergestalt, daß mit dem Winkel auch solche Verhältniß, und mit solcher Verhältniß auch der Winkel zugleich gegeben ist.

Ist demnach der Winkel BAC gegeben, und von einem willkürlichen Punkte B des einen Schenkels, die Linie BC auf dem andern Schenkel senkrecht: so sind auch die Verhältnisse AB : BC, und AC : BC, folglich auch AB : AC gegeben; weil, wo auch immer in AB der Punkt B angenommen sey, alle daher entstehenden Triangel ähnlich sind, und also eben die Verhältnisse geben.

Eben so, ist die Verhältniß AC : BC gegeben, und man verbindet diese Linien unter einem rechten Winkel, und ziehet die dritte Seite AB: so entstehen gleichfalls ähnliche Triangel, worinn die Winkel A und B dieselben bleiben. Ein gleiches gilt auch von den Verhältnissen AB : AC, und AB : BC.

Zusatz 1. Die Linie BC braucht nicht senkrecht zu seyn, wenn nur der Winkel C auch gegeben ist; indem man aus den gegebenen Verhältnissen drey Linien finden, und aus diesen den Triangel zusammensetzen kann.

2. Ist der Winkel C ein rechter, so lassen sich die gegebenen Verhältnisse auch trigonometrisch auf mannichfaltige Art ausdrücken.

§. 4.

Digitized by Google

§. 4.

Die Reduction und gänzliche Solution der formirten Gleichung ist mit dem, was davon in der Algebra gelehrt worden, völlig übereinstimmig, nur mit dem Unterschiede, daß zu allen diesen die geometrische Construction noch hinzu kommen müsse, welche auch unmittelbar mit der formirten Gleichung ohne so viele, oft ohne alle Reduction, vorgenommen werden kann.

§. 5.

Die geometrische Construction einer Gleichung geschiehet, indem man den Algebraischen Ausdruck in die geometrische Sprache überträgt, und nach deren Vorschrift die Figur verzeichnet; wodurch denn die Aufgabe völlig aufgelöst ist, das heißt, die Wurzeln der Gleichung in Linien gefunden sind.

Zusatz. Die geometrische Construction der Gleichungen ist nicht auf geometrische Aufgaben allein eingeschränkt, sondern erstreckt sich auch auf alle algebraische Aufgaben; wodurch man denn eine neue Methode erhält, die Wurzeln einer Gleichung zu finden.

§. 6.

Aufgabe. Jede Gleichung, wenn sie nur eine unbekannte Grösse enthält, und nicht über zwey Dimensionen hat, geometrisch zu construiren. Fig. 189. 190. 191. 192.

1. Es sey $x = a.b$, oder $y = \frac{x}{a}$. Man ziehe Fig. 189. zwey gerade Linien AB, BC, unter einem beliebigen Winkel, mache BD = 1, BA = a, BE = b, ziehe DE, und mit ihr durch A die AC parallel: so ist BC = x; weil

BD : BA = BE : BC, das ist, 1 : a = b : x. Eben so macht man BD = 1, BA = a, BC = x, ziehet AC, und mit ihr durch D die DE parallel: so ist BE = y; weil BA : BD = BC : BE, das ist, a : 1 = x : y.

2. Es sey $x = \sqrt{p}$. Auf der geraden Linie AB, Fig. 190. sey AC = 1, CB = p. Halbirt man nun AB in D, beschreibt mit DA einen Cirkel, und macht CE senkrecht: so ist CE = x, weil AC : CE = CE : CB, das ist, 1 : x = x : p.

3. Es sey $x^2 \mp ax - b^2 = 0$. Man mache Fig. 191. CA senkrecht auf AB, auch $AC = \frac{1}{2}a$, und AB = b, ziehe BCD, und aus C mit CA einen Cirkel: so ist sowohl BD = — x und BE = + x, als auch BE = — x und BD = + x. Denn ist BD = — x, so ist $BC = -x - \frac{1}{2}a$, folglich $BC^q = x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$. Nun ist $BC^q = AC^q + AB^q$. Folglich ist $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$, folglich $x^2 + ax - b^2 = 0$. Ist BE = + x: so ist $BC = x + \frac{1}{2}a$, folglich eben so $x^2 + ax - b^2 = 0$. Ist BE = — x, so ist $BC = \frac{1}{2}a - x$, folglich $BC^q = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2 = AC^q + AB^q = \frac{1}{4}a^2 + b^2$, folglich $x^2 - ax - b^2 = 0$. Ist BD = + x, so ist $BC = x - \frac{1}{2}a$, folglich eben so $x^2 - ax - b^2 = 0$.

Hätte man die Gleichung $x^2 + ax - b^2 = 0$ vorher aufgelöst, und gefunden $x = -\frac{1}{2}a \mp \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)}$: so erhielte man durch eben die Construction diese Wurzeln BE, BD.

4. Es sey $x^2 - ax + b^2 = 0$. Man mache Fig. 192. CA senkrecht auf AB, auch $AC = \frac{1}{2}a$, und AB = b, ziehe aus C mit CA einen Cirkel, und durch B der AC die BDE parallel: so sind BD, BE, die gesuchten Wurzeln; weil III. §. 148. $AB^q = BD . BE$, woraus sich die Gleichung so wie in num. 3. leicht formiren läßt.

Zusatz.

Digitized by Google

Zusatz. Solte die BE den Cirkel weder schneiden, noch berühren: so zeigt dies an, daß die Gleichung unmögliche Wurzeln habe, und daß also auch keine geometrische Construction möglich sey. Man vergleiche hiemit V. §. 21. Anmerk. 2.

Anmerkung 1. Es lassen sich von Gleichungen auf mannichfaltige Art geometrische Constructionen machen; diese aber sind als die leichtesten, und zugleich aus dem Grunde angezeigt worden, weil sie vom Carteſius, welcher die Algebra in der Geometrie zuerst eingeführt hat, so angegeben sind.

2. Von der allgemeinen quadratischen Gleichung $x^2 \mp px \mp q = 0$, findet man geometrische Constructionen III. §. 152. 153. wie auch von der Gleichung $x^2 = a^2 \mp b^2$, III. §. 65. Zus. und §. 98 *. Doch soll erstere §. 13. näher entwickelt werden.

§. 7.

Eine geometrische Aufgabe ist eben so, wie eine algebraische, bestimmt oder unbestimmt, je nach dem die Aufgabe eben so viele Gleichungen, als unbekannte Größen vorhanden sind, darbietet, oder nicht.

Anmerkung. Von der Beschaffenheit unbestimmter geometrischer Aufgaben handelt das folgende Kapitel; hier ist nur von bestimmten Aufgaben die Rede.

II. Einfache Gleichungen.

§. 8.

Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie AB, einen rechtwinklichten Triangel zu beschreiben, so daß der rechte Winkel der gegebenen Linie entgegengesetzt, und der Triangel einem gegebenen Quadrate Q gleich sey. Fig. 193.

Digitized by Google

1. Geometrische Auflösung. In der Aufgabe liegen zwey Bedingungen: daß der rechte Winkel des Triangels der gegebenen Linie entgegengesetzt, und daß der Triangel dem gegebenen Quadrat gleich seyn müsse. Die erste Bedingung wird erfüllt, wenn man AB in C halbirt, und aus C mit CA einen halben Cirkel beschreibt; da denn von jedem Punkte der Peripherie gerade Linien nach A und B gezogen werden können, wodurch lauter rechtwinklichte Triangel formirt werden, deren Hypothenuse AB ist. Zur zweyten Bedingung gehört nur noch die Höhe des Triangels; weil diese Höhe, und die halbe Grundlinie AC, den Inhalt des Triangels bestimmt, welcher dem Innhalte des Quadrats Q gleich seyn soll. Solche Höhe aber wird gefunden, wenn man III. §. 125. zur halben Grundlinie und zur Seite des Quadrats die dritte Proportionallinie sucht. Sie sey gefunden, und der senkrechten Linie CD gleich. Ziehet man nun durch D der AB die EF parallel: so kann man von jedem Punkte der EF gerade Linien nach A und B ziehen, wodurch lauter Triangel formirt werden, deren jeder dem Quadrate Q gleich ist. Verbindet man nun beyde Bedingungen: so siehet man leicht ein, daß die Punkte E und F beyden zugleich ein Genüge leisten, und daher die Aufgabe auflösen.

Wäre das gegebene Quadrat größer: so würde CD auch größer, und einmal dem Halbmesser CG gleich werden, so daß nach und nach die Punkte E, F, immer näher zusammenrücken, und alsdenn in G zusammen treffen müßten. Wäre das Quadrat so groß, daß die dazu gehörige Höhe größer als CG würde: so wäre gar keine Auflösung möglich.

2. Algebraische Auflösung. Nennt man das gegebene Quadrat a^2, die gegebene Linie, welche die Hypothenuse des rechtwinklichten Triangels werden soll, b, die beyden

beyden Catheten x und y: so ist der Inhalt des Triangels $\frac{xy}{2} = a^2$, folglich $2xy = 4a^2$; und nach dem Pythagorischen Lehrsatze $x^2 + y^2 = b^2$. Addirt man beyde Gleichungen: so erhält man $x^2 + 2xy + y^2 = b^2 + 4a^2$, folglich $x + y = \surd(b^2 + 4a^2)$. Subtrahirt man beyde Gleichungen von einander: so erhält man $x^2 - 2xy + y^2 = b^2 - 4a^2$, folglich $x - y = \surd(b^2 - 4a^2)$. Demnach ist IV. §. 49. $x = \frac{\surd(b^2 + 4a^2) + \surd(b^2 - 4a^2)}{2}$, und $y = \frac{\surd(b^2 + 4a^2) - \surd(b^2 - 4a^2)}{2}$.

3. Geometrische Construction. Sucht man III. §. 65. Zus. $\surd(b^2 + 4a^2)$, und III. §. 98 * $\surd(b^2 - 4a^2)$: so findet man daraus x und y, und kann hierauf den verlangten Triangel leicht beschreiben.

Anmerkung. Hätte man in obigen beyden Gleichungen $\frac{xy}{2} = a^2$, und $x^2 + y^2 = b^2$, den Werth von x^2 gesucht; nämlich $b^2 - y^2$, und $\frac{4a^2}{y^2}$: so wäre nach gehöriger Reduction $y^4 + b^2y^2 + 4a^2 = 0$. Setzt man V. §. 19. Zus. $y^2 = z$: so ist $z^2 + b^2z + 4a^2 = 0$, eine quadratische Gleichung, welche sich nach §. 6. construiren läßt; wovon das nähere §. 13. folgen wird.

§. 9.

Aufgabe. Die drey Seiten eines Triangels ABC, sind gegeben, auf eine derselben BC, fällt von dem entgegengesetzten Winkel ein Perpendikel AD; man soll die Abschnitte dieser Seite, BD, DC, finden. Fig. 194.

Digitized by Google

Es sey CB = a, BA = b, AC = c, BD = x, DC = a — x: so ist $AD^q = AC^q - DC^q = AB^q - BD^q$, das ist, $c^2 - a^2 + 2ax - x^2 = b^2 - x^2$, folglich $2ax = b^2 - c^2 + a^2$, folglich $x = \frac{b^2 - c^2}{2a} + \frac{1}{2}a = \frac{(b+c)(b-c)}{2a} + \frac{1}{2}a$.

Demnach besteht der Abschnitt BD, aus der halben Seite BE, und aus ED, der vierten Proportionallinie zu der doppelten Seite BC, zur Summe, und zur Differenz der beyden übrigen Seiten BA, AC; wornach die geometrische Construction zu machen ist.

Zusatz. 1. Die Construction ergiebt sich hier, so wie in vielen Fällen, auch so gleich aus der Aufgabe selbst. Denn macht man aus den gegebenen Seiten den Triangel, und fället von der Spitze A einen Perpendikel: so hat man die Abschnitte BD, DC, unmittelbar. In dergleichen Fällen haben die algebraischen Formeln wenigstens den Nutzen, daß sie die Methode zeigen, das gesuchte zu berechnen.

2. Die Auflösung ist oben so genommen, daß $b > c$. Denn ist $b < c$: so wird b — c, folglich der ganze Ausdruck für ED, negativ, und muß alsdenn nicht zu BE addirt, sondern davon subtrahirt werden.

§. 10.

Aufgabe. In einem rechtwinklichten Triangel BAC, ist die Summe der drey Seiten, nebst der Höhe AD, gegeben; man soll die Hypothenuse BC, finden. Fig. 195.

Es sey AB + BC + CA = a, AD = b, BC = x, und daher CA + AB = a — x. Auch setze man CA —

Digitized by Google

$CA - AB = y$. Folglich ist IV. §. 49. $AC = \frac{a - x + y}{2}$, und $AB = \frac{a - x - y}{2}$.

Nach dem Pythagorischen Lehrsatze ist $BC^q = AB^q + AC^q$, das ist, $x^2 = \frac{a^2 - 2ax + x^2 + 2ay - 2xy + y^2}{4} + \frac{a^2 - 2ax + x^2 - 2ay + 2xy + y^2}{4} = \frac{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}{2}$, folglich $x^2 = a^2 - 2ax + y^2$.

Nach III. §. 122. Zus. 1. ist $BC : BA = AC : AD$, das ist, $x : \frac{a - x + y}{2} = \frac{a - x - y}{2} : b$, folglich $bx = \frac{(a - x)^2 - y^2}{4}$, folglich $4bx = a^2 - 2ax + x^2 - y^2$, folglich $y^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4bx$.

Setzt man diesen Werth anstatt y^2 in die oben gefundne Gleichung für x^2, so erhält man $x^2 = a^2 - 2ax + a^2 - 2ax + x^2 - 4bx$, folglich $0 = 2a^2 - 4ax - 4bx$, oder $0 = a^2 - 2ax - 2bx$, folglich $(2a + 2b)x = a^2$, folglich $x = \frac{a^2}{2a + 2b} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot a}{a + b}$.

Demnach ist $a + b : a = \frac{1}{2}a : x$, oder die Hypotenuse geometrisch bestimmt, und kann der rechtwinklichte Triangel, dessen Höhe auch gegeben ist, leicht in einem halben Cirkel beschrieben werden.

Anmerkung. Bey dieser Auflösung ist eine unbekannte Größe y freywillig hinzugefügt, und hierauf wieder eliminirt worden.

§. II.

Aufgabe. In einem Triangel ABC, ist die Grundlinie BC, nebst den Winkeln an der Grund-

linie, B und C, gegeben; man soll die Höhe AD, finden. Fig. 194.

Es sey BC = a, AD = x. Wegen der gegebenen Winkel, B und C, sind §. 3. die Verhältnisse AD:DB, und AD : DC, gegeben. Nun sey AD : DB = m : n, und AD : DC = p : q. Folglich ist DB = $\frac{nx}{m}$, und DC = $\frac{qx}{p}$; folglich a = $\frac{nx}{m} + \frac{qx}{p}$; folglich amp = npx + mqx = (np + mq) x, folglich x = $\frac{amp}{np + mq}$.

Zusatz. 1. Machte man p : q = m : r, so würde x = $\frac{amm}{nm + mr} = \frac{am}{n + r} = a. \frac{m}{n + r}$, folglich n + r : m = a : x.

2. Ist m oder AD, der Halbmesser: so sind n und r, oder BD und DC, die Cotangenten der Winkel B und C.

3. Wäre C ein stumpfer Winkel: so erhält man x = a. $\frac{m}{n - r}$, weil alsdenn $\frac{nx}{m} - \frac{qx}{p} = a$ ist.

§. 12.

Aufgabe. In einem Triangel ABC, sind zwey Seiten AB, BC, nebst dem eingeschlossenen Winkel B, gegeben; man soll einen der übrigen Winkel C, finden. Fig. 194.

Wegen des gegebenen Winkels B, sind §. 3. die Verhältnisse AB : BD, und AB : AD, gegeben, und wegen des gesuchten Winkels C, will man die Verhältniß CD : DA. Nun sey AB = a, BC = b, AB : BD = m : n, AB : AD = p : q; so ist AD = $\frac{qa}{p}$, und BD = $\frac{na}{m}$, daher

Digitized by Google

daher $CD = b - \frac{na}{m} = \frac{mb - na}{m}$. Demnach ist $CD : DA = \frac{mb - na}{m} : \frac{qa}{p}$, und §. 3. durch diese Verhältniß der Winkel C gefunden.

Zusatz. 1. Macht man $p : q = m : r$, so ist $CD : DA = mb - na : ra$.

2. Ist m oder AB der Halbmesser: so ist n oder BD der Cosinus, und r oder AD der Sinus des Winkels B. Die gefundne Verhältniß CD : DA, aber ist die Verhältniß des Halbmessers zur Tangente des Winkels C.

III. Quadratische Gleichungen.

§. 13.

Aufgabe. Jede quadratische Gleichung von der Form $x^2 \mp px + q = 0$, geometrisch zu construiren. Fig. 196. 197. 198. 199.

Man lege willkührlich eine gerade Linie als Einheit zum Grunde, und bestimme darnach p und q in geraden Linien. Nun sey die Gleichung

1. $x^2 - px + q = 0$. Man ziehe Fig. 196. zwey gerade Linien AB, AC, senkrecht auf einander; mache $AC = 1$, $AB = p$, $AD = q$; halbire AB und CD in E und F; vollende das Parallelogramm AG; und ziehe aus G durch D und C einen Cirkel: so sind AH, AK, die gesuchten Wurzeln, und zwar beyde positiv.

Denn da III. §. 146. 147. $AC : AK = AH : AD$; so ist $AH . AK = AC . AD = 1 . q = q$. Da auch AB in E halbirt, und III. §. 69. EH = EK: so ist AH = KB, folglich BH = AK.

Setzt man nun $AK = + x$, so wird $AH = KB = p - x$, und $AH . AK = px - x^2 = q$, folglich

$x^2 - px + q = o$. Setzt man $AH = + x$, so wird $AK = P - x$, und man erhält eben die Gleichung.

2. $x^2 + px + q = o$. Man mache Fig. 197. alles wie vorher, nur daß man der AB eine entgegengesetzte Lage gebe: so ist alles wie vorher, nur daß die Wurzeln AH, AK, beyde negativ sind.

Setzt man nun $AK = BH = - x$: so wird $AH = p - (- x) = p + x$, folglich $AH . AK = - px - x^2 = q$, folglich $x^2 + px + q = o$. Setzt man $AH = - x$, so wird $AK = P + x$, und man erhält eben dieselbe Gleichung.

3. $x^2 - px - q = o$. Man mache Fig. 198. alles wie zuerst, nur daß man AD in die entgegengesetzte Lage bringe: so ist alles wie zuerst, nur daß die größere Wurzel AK positiv, die kleinere AH negativ ist.

Setzt man nun $AK = + x$, so wird $AH = x - p$, folglich $AH . AK = x^2 - px = q$, folglich $x^2 - px - q = o$. Setzt man $AH = BK = - x$, so wird $AK = p - x$, und man erhält eben die Gleichung.

4. $x^2 + px - q = o$. Man mache Fig. 199. alles wie zuerst, nur daß man AB sowohl als AD in die entgegengesetzte Lage bringe: so ist alles wie zuerst, nur daß die kleinere Wurzel AK positiv, die größere AH negativ ist.

Setzt man nun $AK = + x$, so ist $AH = p + x$, folglich $AH . AK = px + x^2 = q$, folglich $x^2 + px - q = o$. Setzt man $AH = - x$, so ist $AK = - x - p$, und man erhält eben die Gleichung.

Zusatz. 1. Die beyden ersten Figuren, so wie die beyden letzten sind nur der Lage nach verschieden. Daher alles nur auf Fig. 196. 198. (oder Fig. 128. 127.) ankommt, von denen die erste oder die letzte gebraucht wird,

Digitized by Google

wird, je nach dem in der Gleichung q positiv, oder negativ ist. Doch setzen alle vier Figuren die Sache noch mehr ins Licht.

2. Ist in den beyden ersten Figuren FA dem Halbmesser des Cirkels gleich: so treffen K und H in einem Punkte zusammen, und beyde Wurzeln werden einander gleich. Ist aber FA größer als der Halbmesser: so reicht der Cirkel nicht an AB, und die Wurzeln sind unmöglich; welches in den beyden letztern Figuren nie geschehen kann, weil C und D an verschiedenen Seiten der AB liegen, und daher ein Cirkel aus G durch C und D die AB nothwendig zweymal schneiden muß.

§. 14.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie AB, soll so geschnitten werden, daß der eine Abschnitt AK, die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen Linie AB, und dem andern Abschnitte KB, werde. Fig. 200.

Es sey $AB = a$, $AK = x$, und daher $KB = a - x$. Demnach ist $a : x = x : a - x$, folglich $x^2 = a^2 - ax$, folglich $x^2 + ax - a^2 = 0$.

Die Construction geschiehet nach dem vierten Falle §. 13. da denn $p = a$, und wenn man die Einheit a setzt, auch $q = a$ ist. Man mache daher $AC = AD = a = AB$, und $AE = \frac{1}{2}a$, und beschreibe aus E einen Cirkel durch C und D, so sind AK und AH die Wurzeln, welche der Aufgabe ein Genüge leisten; so daß so wohl $AK^2 = AK . KB$, als auch $AH^2 = AB . HB$.

Eben diese Wurzeln lassen sich auch berechnen, wenn man die gefundne Gleichung in die einzelnen $x = -\frac{1}{2}a$

$-\frac{1}{2}a \mp r(a^2 + \frac{3}{4}a^2)$ zerlegt, das ist $x = -\frac{1}{2}a \mp r\frac{1}{4}a^2 = \frac{-a \mp r5}{2} = a.\frac{-1 \mp r5}{2}$.

§. 15.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie AB, soll so geschnitten werden, daß das Quadrat des einen Abschnitts AH, zum Quadrat des andern Abschnitts HB, die gegebene Verhältniß m : n, habe. Fig. 201.

Es sey $AB = a$, $AH = x$, und daher $HB = a - x$: so ist $x^2 : (a^2 - 2ax + x^2) = m : n$, folglich $nx = ma^2 - 2max + mx^2$, folglich $(m - n)x^2 + ma^2 - 2max = 0$, folglich $x^2 - \frac{2ma}{m-n}x + \frac{ma^2}{n-m} = 0$.

Die Construction geschiehet nach dem ersten Falle §. 13, da denn $p = \frac{2ma}{m-n}$, folglich $AE = \frac{ma}{m-n}$. Nun sey auch $AC = 1 = \frac{ma}{m-n}$, so ist $q = AD = a$. Vollendet man hierauf die Figur: so sind AH und AK die gesuchten Wurzeln, so daß $m : n = AH^q : HB^q = AK^q : BK^q$.

Eben diese Wurzeln lassen sich auch berechnen, wenn man aus der gefundnen Gleichung schließt $x = \frac{ma}{m-n} \mp r\left(-\frac{ma^2}{m-n} + \frac{m^2a^2}{(m-n)^2}\right)$. Letztrer Ausdruck, auf einerley Benennung gebracht, giebt $r\frac{-m^2a^2 + mna^2 + m^2a^2}{(m-n)^2} = r\frac{mna^2}{(m-n)^2} = \frac{ar mn}{m-n}$. Folglich ist $x = \frac{ma \mp ar mn}{m-n} = a.\frac{m \mp r mn}{m-n}$.

Es

Es sey z. E. a = 10, m = 9, n = 4: so ist x entweder = 10. $\frac{9 - \sqrt{36}}{5} = \frac{90 - 60}{5} = 6$; oder = 10. $\frac{9 + \sqrt{36}}{5} = \frac{90 + 60}{5} = 30$.

Für x = 6 ist HB = 4, und 36 : 16 = 9 : 4.
Für x = 30 ist BK = 20, und 900 : 400 = 9 : 4.

Digitized by Google

Zweytes Kapitel.

Von den unbestimmten Aufgaben.

I. Grundlehren.

§. 16.

Eine unbestimmte Aufgabe führt auf eine Gleichung, worinn zwey oder mehrere unbekannte Größen vorkommen, so daß eine davon durch die Gleichung bestimmt wird, wenn die übrigen willkührlich angenommen werden, auch der Werth von jener verschiedentlich ausfällt, je nachdem man diesen einen verschiedenen Werth beylegt. Daher nennt man die unbekannten Größen einer solchen Gleichung, die mancherley Werthe zulassen, veränderliche Größen; die bekannten aber, deren Werth, wenn er einmal angenommen ist, sich nicht verändert, beständige Größen. Die Construction einer solchen Gleichung giebt unzählige Puncte, welche alle der Aufgabe ein Genüge leisten. Diese Puncte liegen gemeiniglich in einer geraden oder krummen Linie, welche sich in einer Ebene verzeichnen läßt, und der geometrische Ort aller gesuchten Puncte genannt wird.

So war z. E. §. 8. die Peripherie des halben Cirkels der geometrische Ort für die Spitze aller rechtwinklichten Triangel, deren Hypothenuse die gegebene Linie AB ist; und die gerade Linie EF der geometrische Ort für die Spitze aller Triangel, deren Grundlinie AB, und deren Höhe CD; deren jeder daher dem gegebenen Quadrate Q gleich ist.

Zusatz.

Digitized by Google.

Zusatz. 1. Der geometrische Ort kann auch eine Fläche seyn, so wie auch eine Linie, welche sich nicht in einer Ebene, sondern, z. E. auf der Oberfläche einer Kugel, beschreiben läßt. Gemeiniglich aber, und dies ist der Fall, auf den wir uns einschränken, ist der Ort eine Linie in einer Ebene; und zwar entweder eine gerade Linie, oder eine Cirkellinie, oder eine jede andre krumme Linie.

2. In diesem Theile der Analysis, den man füglich die unbestimmte geometrische Analytik nennen könnte, der aber in der eingeführten Sprache die Geometrie der krummen Linien, geometria curvarum, auch wohl die höhere Geometrie, geometria sublimior heißt, muß man zum Verständniß solcher Benennungen die Elementar-Aufgaben, welche zu ihrer Construction nur gerade oder Cirkel-Linien erfodern, von den höhern Aufgaben unterscheiden, deren Construction auf andre krumme Linien außer dem Cirkel führet. Letztre nur machen die Geometrie der krummen Linien aus, welche mit dem Namen der höhern Geometrie belegt wird; in deren Gegensatz Elementar-Geometrie heißt, die sich auf gerade Linien und den Cirkel einschränkt.

Anmerkung. Schon Plato hat bemerkt, wie nur Unkundige sich wundern könnten, daß auch Irrationalgrößen vorhanden wären, und wie es vielmehr ein Wunder seyn würde, wenn es nicht sehr viele Irrationalgrößen gäbe. Eben diese Bemerkung läßt sich auch auf die unbestimmten Aufgaben anwenden, da es denn leicht begreiflich wird, daß deren Menge unzählbar seyn müsse. Denn die Größen haben sehr viele Eigenschaften mit einander gemein, und nur einige ihnen eigenthümliche. Enthält nun eine Aufgabe nur solche gemeinschaftliche Eigenschaften: so ist es offenbar, daß solche nicht bestimmt

sey,

Digitized by Google

sey, sondern daß alle Größen, denen solche Eigenschaften gemein sind, zur Auflösung der Aufgabe dienen werden. Daher lassen sich auch leicht bestimmte Aufgaben in unbestimmte verwandeln, wenn man einige Bedingungen, die zu ihrer völligen Bestimmung dienen, daraus entfernt.

§. 17.

Jeder Ausdruck, worinn eine veränderliche Größe auf irgend eine Art vorkommt, dessen Werth daher mit der veränderlichen Größe zugleich sich ändert, heißt eine Function solcher veränderlichen Größe; dergleichen man aus jeder unbestimmten Gleichung herleiten, oder in eine unbestimmte Gleichung verwandeln kann.

So ist x^m, oder $ax + bx^2$, oder $(yx^n + ax^m)^p$ oder log. x, oder sin x, u. s. w. eine Function der veränderlichen Größe x; indem jeder dieser Ausdrücke einen andern und andern Werth bekömmt, je nachdem der Werth von x anders und anders angenommen wird.

Auf eben die Art giebt auch die unbestimmte Gleichung $a^2 - xy = 0$, eine Function von x oder y. Denn aus der Gleichung folgt $a^2 = xy$. Setzt man nun $y = \frac{a^2}{x}$, so ist dieser Ausdruck eine Function von x, welche, da §. 16. a^2 eine beständige Größe ist, so wie x bestimmt wird, auch einen bestimmten Werth erhält, der, da er jedesmal anders ausfällt, durch die veränderliche Größe y angezeigt wird. Setzt man hingegen $\frac{a^2}{y} = x$, so ist dieser Ausdruck auf eben die Art eine Function von y. Und umgekehrt läßt sich jede dieser Functio-

Digitized by Google

Functionen in die unbestimmte Gleichung $a^2 = xy$, oder $a^2 - xy = 0$, verwandeln.

Anmerkung. Eine solche Gleichung enthält selten mehr als drey; am häufigsten nur zwey veränderliche Größen. Auf den letztern Fall schränken wir uns ein; da denn die Gleichung oder Function durch eine Linie in einer Ebene construirt werden kann.

§. 18.

Die Ordnung einer unbestimmten Gleichung, oder einer Function, wird nach der höchsten Dimension, womit die veränderlichen Größen, oder auch nur eine derselben, vorkommen, bestimmt.

Bey Bestimmung der Ordnung kann man die eine veränderliche Größe für die übrigen setzen, um eine bestimmte Gleichung zu erhalten. Je nachdem nun diese einfach, oder quadratisch u. s. w. ist, je nachdem ist auch die unbestimmte Gleichung oder die Function von der ersten, zweyten, oder einer höhern Ordnung. Auch werden hiernach die Functionen einförmig, zweyförmig, vielförmig genannt.

§. 19.

Aufgabe. Für unbestimmte Gleichungen, oder für Functionen, eine leichte Constructions-Methode anzugeben. Fig. 202.

In einer Ebene ziehe man zwey gerade Linien AB, CD, welche sich in O unter einem beliebigen Winkel schneiden. Ist nun von irgend einer veränderlichen Größe x eine Function $y = \frac{a^2}{x}$: so trage man auf AB von O an die verschiedenen Werthe von x, die positiven nach B,

Digitized by Google

die negativen nach A zu, und eben so die jedesmal hiedurch bestimmten Werthe von y auf CD von O an, die positiven nach C, die negativen nach D zu, z. E. $y = \mp OF$, für $x = \mp OG$. Vollendet man hierauf das Parallelogramm GF: so bestimmt solches den einen Punkt E der gesuchten Linie. Auf eben die Art lassen sich auch mehrere Punkte, und durch solche der geometrische Ort der Function bestimmen.

Zusatz. Hieraus erhellet zugleich, daß ein solcher Punkt, wie E, innerhalb des Winkels COB fallen wird, wenn x und y positiv sind; innerhalb AOD, wenn x und y negativ sind; innerhalb AOC, wenn x negativ und y positiv ist; innerhalb BOD, wenn x positiv und y negativ ist.

Anmerkung. Die Construction einer Function ist nicht an eine Methode gebunden, sondern läßt sich auf unzählige Arten bewerkstelligen, besonders, wenn man dabey annimmt, daß die veränderlichen Größen auch Winkel, oder Theile von der Peripherie eines Cirkels, und dergleichen mehr, bedeuten. Indessen ist die angeführte Methode die einfachste, von welcher man nicht leicht abgehet.

§. 20.

Von den beyden geraden Linien, AB, CD, welche sich in einer Ebene unter einem gewissen Winkel O schneiden, und auf welche der geometrische Ort einer Function in derselben Ebene sich beziehet, heiße die eine AB die Grundlinie; die andre CD, die Seite. Jede der Grundlinie oder der Seite parallele Linie heiße eine Ordinate, und jede zwey zusammengehörige Ordinaten, wie GE, FE, Coordinaten, auch der Winkel, den die Coordinaten einschließen, und der allemal dem Winkel O gleich ist, der Coordinaten-

Digitized by Google

ten-Winkel. Endlich jeder Theil der Grundlinie, welcher von der Seite CD, und der ihr applicirten Ordinate wie GE, abgeschnitten wird, heiße eine Abscisse, und der Durchschnittspunkt der Seite, O, der Anfang der Abscissen. In dieser Rücksicht nennt man auch die Grundlinie AB die Abscissenlinie. und die der Seite CD parallel gezognen Linien, wie GE, die Ordinaten, da denn jede Abscisse wie OG ihre zugehörige Ordinate GE hat, und jene durch x, diese durch y, bezeichnet zu werden pflegt. Beyde sind alsdenn Coordinaten, und der Winkel, unter welchen sie einander schneiden, der Coordinaten-Winkel. Fig. 202.

§. 21.

Ist der geometrische Ort einer Function eine krumme Linie: so heißt die Abscissenlinie die Axe, Diameter, je nachdem der Ordinaten-Winkel ein rechter ist, oder nicht. Der Scheitel der krummen Linie ist der Punkt, worinn die krumme Linie die Axe schneidet. Die Schenkel, ramii, sind die Theile der krummen Linie zu beyden Seiten der Axe vom Scheitel an. Eine gerade Linie, welche mit einer krummen Linie einen Punkt gemein hat, so daß beyde Bogen der krummen Linie von solchem Punkte an auf einer Seite der geraden Linie liegen, heißt eine Tangente der krummen Linie; und der Theil der Abscissenlinie, welcher von der verlängerten Tangente und von der dem Berührungspunkte zugehörigen Ordinate abgeschnitten wird, die Subtangente. Eine gerade Linie, welche auf der Tangente im Berührungspunkte senkrecht ist, und die Abscissenlinie schneidet, heißt eine Normallinie, und derjenige Theil der Abscissenlinie, welcher von der Normallinie und obgedachter Ordinate abgeschnitten wird, die Subnormallinie. Fig. 203.

Digitized by Google

Für die Cirkellinie FAE sey AC die Abscissenlinie, A der Anfang der Abscissen, AP eine Abscisse x, PM eine Ordinate y, also AP, PM, Coordinaten, und der rechte Winkel APM der Coordinaten-Winkel: so ist AC die Axe der Curve; A der Scheitel; AE, AF, die Schenkel; MD eine Tangente; MC die Normallinie; PD die Subtangente; PC die Subnormallinie.

§. 22.

Aufgabe. Für eine Linie von bekannten oder gegebenen Eigenschaften eine Function zu formiren. Fig. 202.

Nachdem die Lage der Grundlinie AB, und der Seite CD, nebst dem Anfange der Abscissen O, in einerley Ebene mit der bereits construirten Linie, gegeben, oder willkührlich angenommen worden, ziehe man von irgend einem Punkte der gegebnen Linie E, Coordinaten EE, EG, und bringe solche mittelst beständiger Größen, auf deren Beschaffenheit sich die Beschaffenheit der gegebenen Linie gründet, in eine Gleichung: so giebt solche die verlangte Function.

Zusatz. 1. Der Nutzen der Functionen ist nach dem bisherigen gedoppelt. Denn ist die Function gegeben: so braucht man solche, um die Eigenschaften der Linie, die durch solche Function ausgedrückt wird, daraus herzuleiten. Ist aber die Linie von bekannten Eigenschaften gegeben: so bringt man solche in eine Gleichung, und formirt hiedurch eine Function, welche die Natur der Linie in sich faßt. Demnach können die Functionen als sehr brauchbare Definitionen der Linien angesehen werden.

2. So wie man von einer und derselben Sache, in verschiedener Rücksicht auf diese oder jene Eigenschaft und Beziehung, verschiedene Definitionen geben kann: so

kann

Digitized by Google

kann man auch für eine und dieselbe Linie verschiedne Functionen formiren, je nachdem sich die Linie nach verschiednen beständigen Größen bestimmen läßt.

3. So wie das, was eine verschiedne Definition zu seyn scheint, oft nur ein verschiedner Ausdruck einer und derselben Definition ist: so läßt sich auch eine und dieselbe Function in verschiednen Ausdrücken darstellen, je nachdem man von den drey Stücken, die bey jeder Function zum Grunde liegen, nämlich dem Anfang der Abscissen, der Lage der Grundlinie, und der Lage der Seite, eins oder zwey, oder alle ändert.

II. Ableitung der Functionen aus den Linien.

§. 23.

Aufgabe. Für die gerade Linie eine Function zu finden. Fig. 204.

In der Ebene, worinn die gegebene gerade Linie ON ist, ziehe man nach Gefallen die Abscissenlinie CD, welche die gegebene Linie in O schneidet, und nehme den willkührlichen Anfang der Abscissen A. Von einem beliebigen Punkte der gegebenen Linie M ziehe man MP unter beliebigem Winkel, und AP mit MP parallel: so ist OA und die Winkel O und A, folglich auch AB gegeben. Nun sey AO = m, AB = n, AP = x, PM = y, und daher OP = m + x, und III. §. 116. OA : AB = OP : PM. Folglich ist m : n = m + x : y, folglich my = nm + nx, folglich $y = n + \frac{n}{m} x$, die verlangte Function.

§. 24.

Aufgabe. Für den Cirkel eine Function zu finden. Fig. 205.

1. Auf dem Durchmesser AB = 2r, sey A der Anfang der Abscissen, und in einem beliebigen Punkte P, die PM senkrecht, so daß AB = x, PM = y, und PB = 2r — x. Nun ist III. §. 122. AP : PM = PM : PB. Folglich ist x : y = y : 2r — x, folglich $y^2 = 2rx - x^2$, die verlangte Function.

2. Im Mittelpunkte C sey der Anfang der Abscissen, und pm senkrecht: so ist III. §. 65. $Cm^q = Cp^q + pm^q$, das ist, $r^2 = x^2 + y^2$, folglich $y^2 = r^2 - x^2$, die verlangte Function.

Zusatz. 1. Wolte man die letztre Function in eine verwandeln, wobey der Anfang der Abscissen A wäre, folglich die Abscisse Ap: so setze man in obiger Function $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, $x - r$ anstatt x, und man erhält $x^2 - 2rx + y^2 = 0$, folglich $y^2 = 2rx - x^2$, die erste Function.

2. Solte in eben der Function D der Anfang der Abscissen seyn, so daß CD = n; so setze man y + n anstatt y, und man erhält $y^2 + 2ny + n^2 + x^2 - r^2 = 0$, wobey DL die Abscissenlinie, folglich DG die Abscisse, und GM die Ordinate ist.

3. Solte E der Anfang der Abscissen seyn, so daß EF = a, und FE = b: so setze man x — a statt x, und y — b statt y, und man erhält $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$, wobey EK die Abscissenlinie, folglich EH die Abscisse, Hm die Ordinate ist.

Anmerkung. Diese Veränderungen in dem Ausdrucke einer und derselben Function sind zur Erleichterung an dem speciellen Beyspiele des Cirkels gezeigt worden, um §. 22. Zus. 3. zu erläutern. Die allgemeine Theorie solcher Veränderungen, dahin auch die veränderte Lage der Seite und der Grundlinie gehört, bleibt noch ausgesetzt. Doch ist hier noch anzumerken, daß beym Cirkel zwar

Digitized by Google

zwar die Seite, aber nicht die Grundlinie eine andre Lage zuläßt; indem letztre bey jeder angenommenen Lage doch stets einem Durchmesser des Cirkels parallel bleibt.

§. 25.

Ein Kegelschnitt ist die Figur, welche irgend ein Durchschnitt des Kegels auf seiner Oberfläche macht. Nun gehet ein solcher Durchschnitt 1. entweder durch die Axe des Kegels; 2. oder ist der Grundfläche des Kegels parallel; 3. oder ist gegen die Grundfläche des Kegels mit der Seite desselben unter einerley Winkel geneigt, und daher solcher Seite parallel; oder seine Neigung ist ein von jenem verschiedener Winkel, da er denn 4. entweder beyde entgegengesetzte Seiten des Kegels schneidet, 5. oder nur die eine davon, und die andre blos verlängert. Im ersten Falle ist die Figur ein Triangel, im zweyten ein Cirkel, im dritten eine Parabel, im vierten eine Ellipse, im fünften eine Hyperbel.

Anmerkung. Die beyden ersten Kegelschnitte sind in der reinen Geometrie behandelt, auch für den zweyten §. 24. bereits eine Function gefunden. Für die drey übrigen wird ein gerader Kegel zum Grunde gelegt; indem die Schnitte für den schiefen Kegel von eben der Natur sind, und sich aus jenen leicht herleiten lassen.

§. 26.

Aufgabe. Für die Parabel eine Function zu finden. Fig. 206.

Es sey ΔEDF der Durchschnitt eines geraden Kegels durch die Axe. Durch einen beliebigen Punkt A in der Seite DF lege man einen Schnitt Apm, senkrecht auf der Ebene EDF, der Seite DE parallel: so entsteht

Digitized by Google

§. 25. eine Parabel, deren Axe Ap und Scheitel A ist, da denn Ap der Seite DE parallel läuft. In der Seite DF nehme man willkührlich einen andern Punkt C zwischen A und F, und lege dadurch einen andern Schnitt BMC der Grundfläche parallel, und daher auch senkrecht auf der Ebene EDF: so ist solcher ein Cirkel, dessen Durchmesser BC, der EF parallel ist. Demnach ist PM, worinn sich beyde Schnitte schneiden, so wohl auf AP, als auf BC senkrecht. Wegen des erstern ist AP eine Abscisse, PM eine Ordinate der Parabel, und der Coordinaten-Winkel APM ein rechter. Wegen des letztern ist $PM^q = BP. PC$. Ziehet man nun durch A die AG der BC parallel: so ist AG = BP, und DG: GA = AP : PC, daher $PC = \frac{GA}{DG}. AP$ Folglich ist $PM^q = \frac{AG. AG}{DG}. AP$ Nun ist PM = y, AP = x und $\frac{AG. AG.}{DG} = p$, eine beständige Größe, weil, wo auch A angenommen ist, die Proportion DG : AG = AG : p, unverändert bleibt. Folglich ist $y^2 = px$ die Function für die Parabel.

Zusatz. In dieser Function nennt man die beständige Größe p den Parameter, (Nebenmesser, weil solcher durch Linien AG, DG, bestimmt wird, die nicht in der Ebene der Parabel, sondern neben ihr in dem Axentriangel des Kegels EDF liegen). Dieser Parameter ist die vierte Proportionallinie zu der Axe der Parabel Ap, und den Abschnitten, Ep, pF, welche die Axe auf dem Durchmesser der Grundfläche des Kegels macht. Denn wegen Aehnlichkeit der Triangel DGA, ApF, ist DG : GA = Ap : pF. Nun war DG : AG = AG : p. Folglich ist Ap : pF = AG : p. Nun ist AG = Ep. Folglich ist Ap : pF = Ep : p.

§. 27.

Digitized by Google

§. 27.

Aufgabe. Für die Ellipse eine Function zu finden. Fig. 207.

Es sey HDK abermals der Axentriangel des geraden Kegels. Durch beyde Seiten gehe in A und E ein Schnitt AME senkrecht auf der Ebene HDK; so entsteht §. 25. eine Ellipse, deren große Axe AE, und Scheitel A ist. Durch C gehe abermals ein Cirkel BMC, dessen Durchmesser BC der HK parallel ist: so ist, wie §. 26. AP die Abscisse, PM die Ordinate der Ellipse, beyde senkrecht auf einander, auch $PM^2 = BP.PC$. Nun ist, wenn man AG und EF der HK parallel ziehet, im ΔAEF, $AE : AP = EF : PC$, daher $PC = \frac{AP.EF}{AE}$, und im ΔEAG, $EA : EP = AG : BP$, daher $BP = \frac{EP.AG}{EA}$. Folglich ist $PM^2 = \frac{EP.AG}{EA} \cdot \frac{AP.EF}{AE} = \frac{EP.AP}{AE} \cdot \frac{AG.EF}{AE}$. Nun setze man $PM = y$, $AP = x$, $AE = a$, daher $EP = a - x$, und $\frac{AG.EF}{AE} = p$, eine beständige Größe, weil, wo auch A angenommen ist, die Proportion $AE : EF = AG : p$ unverändert bleibt. Folglich ist $y^2 = \frac{(a-x)x}{a} p = px - \frac{px^2}{a}$ die Function für die Ellipse.

Zusatz. Auch in dieser Function heißt die beständige Größe p der **Parameter**, welcher die vierte Proportionallinie zu der großen Axe AE und den beyden Linien AG, EF, ist, die durch die Endpunkte der großen Axe dem Durchmesser der Grundfläche parallel gezogen werden.

Digitized by Google

§. 28.

Aufgabe. Für die Hyperbel eine Function zu finden. Fig. 208.

Es sey wiederum EDF der Axentriangel des geraden Kegels, dessen über D hinaus verlängerte Schenkel den Axentriangel KDH eines dem erstern entgegengesetzten geraden Kegels bilden. Durch einen willkührlichen Punkt A in der einen Seite DF, und H in der verlängerten andern Seite EDH gehe eine gerade Linie pr. Durch diese Linie gehe ein Schnitt auf der Ebene KEFH senkrecht: so entsteht §. 25. eine Hyperbel, oder zwey entgegengesetzte Hyperbeln, deren Zwergaxe AH, und deren Scheitel A und H sind. Durch C sey abermals ein Cirkel BMC gelegt, dessen Durchmesser BC der EF parallel: so ist $PM^q = BP. PC$. Endlich sey auch durch A die AG der EF parallel: so ist im ΔApF, $Ap : AP = pF : PC$, daher $PC = \frac{AP. pF}{Ap}$, und im ΔHEp, $Hp : HP = Ep : BP$, daher $BP = \frac{HP. Ep}{Hp}$. Folglich ist $PM^q = \frac{HP. Ep}{Hp}. \frac{AP. pF}{Ap} = \frac{AP. HP.}{Ap}. \frac{Ep. pF}{Hp}$. Nun setze man $AP = x$, $PM = y$, $HA = a$, $Ap = HA = a$, daher $Hp = 2a$, und $\frac{Ep. pF}{2a} = p$, eine beständige Größe, weil, wo auch A und H angenommen ist, die Proportion $2a : Ep = pF : p$ unverändert bleibt. Folglich ist $y^2 = \frac{x.(a+x)}{a}. p = px + \frac{px^2}{a}$ die Function für die Hyperbel.

Zusatz. 1. In dieser Function ist A der Anfang der Abscissen, und diese für den untern Theil der Hyperbel positiv. Soll nun A auch für die negativen Abscissen, die

Digitized by Google

die dem obern Theile der Hyperbel zugehörig sind, bleiben: so ist jede dieser Abscissen $= -(Aa+x) = -(a+x)$. Setzt man diesen Werth anstatt x in die obige Gleichung: so erhält man die Gleichung für den obern Theil der Hyperbel $y^2 = p(-a-x) + p\left(\frac{a^2+2ax+x^2}{a}\right)$

$= -pa - px + pa + 2px + \frac{px^2}{a} = px + \frac{px^2}{a}$, die nämliche Gleichung wieder, welche also allgemein für beyde entgegengesetzte Theile der Hyperbel gilt.

2. Auch bey der Hyperbel heißt die beständige Größe p der **Parameter**, und ist die vierte Proportionallinie zu der doppelten Zwergaxe und den Abschnitten Ep, pF, welche die doppelte Zwergaxe auf dem Durchmesser der Grundfläche des Kegels macht.

Anmerkung. Die ersten Elemente der Geometrie der Curven schränken sich auf die Kegelschnitte, als die leichtesten und allgemein brauchbaren Arten der krummen Linien, ein.

III. Ableitung der Linien aus den Functionen.

§. 29.

Aufgabe. Die der Function $y = \frac{bx}{a} + c$, zugehörige Linie zu finden. Fig. 204.

Da x und y, als veränderliche Größen, alle mögliche Werthe haben können: so setze man zuerst ihren Werth Null an. Für $x = 0$ ist $y = c$, und für $y = 0$ ist $\frac{bx}{a} = -c$ folglich $x = \frac{-ca}{b}$.

Man

Digitized by Google

Man ziehe also eine gerade Linie CD, und setze in A den Anfang der Abscissen. In A errichte man die Ordinate AB = c, unter dem vorgeschriebnen Coordinaten-Winkel, wozu hier ein rechter Winkel angenommen ist. Von A trage man linker Hand $\frac{ac}{b}$ = AO, das ist b : a = AB : AO, so ist O der Punkt für y = o, weil unter dieser Voraussetzung $x = -\frac{ac}{b}$ ist. Nun folgt auch aus der Gleichung (y — c) a = bx, folglich ist y — c : x = b : a. Nun war b : a = AB : AO. Folglich ist y — c : x = AB : AO. Nun nehme man willkührlich x = AP, ziehe PM der AB und BS der OA parallel, daher BS = AP = x, und mache AO : AB = BS : SM, so ist SM = y — c, und, wenn man OB, BM ziehet, △OAB ∾ △BSM, folglich OBA = BMS, und daher OBM eine gerade Linie, in welcher also die drey bereits gefundnen Punkte O, B, M, liegen. Nun wird gleiches von allen übrigen Punkten eben so bewiesen. Folglich ist der geometrische Ort für die gegebene Function eine gerade Linie.

Zusatz. Setzt man c = n, und $m = \frac{ac}{b}$, folglich $\frac{b}{a} = \frac{n}{m}$, und bringt diese Werthe in die gegebene Function: so erhält man $y = \frac{n}{m} x + n$ wie man §. 23. gefunden hat.

§. 80.

Aufgabe. Die der Function $y^2 = ay - x^2$ zugehörige Linie zu finden. Fig. 209.

Die

Digitized by Google

Die gegebene Gleichung auf Null gebracht giebt $y^2 - ay + x^2 = 0$, folglich V. §. 19. $y = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - x^2)}$. Setzt man nun

1. $x = 0$; so wird $y = \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}a$, das ist entweder $= a$, oder $= 0$. Man ziehe daher die Abscissenlinie AB, setze den Anfang der Abscissen in C, errichte CD senkrecht, und nehme an, daß $CD = a$: so sind C und D Punkte in der gesuchten Linie.

2. $x = \mp \frac{1}{2}a$, so wird $y = \frac{1}{2}a \mp 0$. Man mache also CB sowohl als $CA = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}CD$, errichte BF und AE senkrecht, und mache jede $= \frac{1}{2}a$: so sind auch F und E Punkte in der gesuchten Linie.

3. $x > \mp \frac{1}{2}a$: so wird $(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$ negativ folglich y unmöglich, das heißt, über F und E hinaus liegt nichts von der gesuchten Linie.

4. x zwischen 0 und $\mp \frac{1}{2}a$: so ist $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - x^2)}$ etwas mögliches, und kleiner als $\frac{1}{2}a$. Demnach giebt es für jedes x zwischen C und B, und zwischen C und A, zwey Ordinaten, $y = \frac{1}{2}a +$ und $y = \frac{1}{2}a -$, wovon also die erste z. E. $PG > \frac{1}{2}a$ aber $< a$, und die zweyte $PM < \frac{1}{2}a$ ist.

Nähme man nun an, daß die gesuchte Linie ein Cirkel wäre, der aus K mit dem Halbmesser KC gezogen ist: so würde solcher mit allen aus der Function abgeleiteten Eigenschaften übereinstimmen; wovon man sich nun auch völlig also überzeugen kann. Es sey PM eine gefundne Ordinate, folglich $CB = x$, $PM = y$. Nun sey MR der CP parallel, und daher $CR = y$, $RM = x$, auch vermöge der gegebenen Gleichung $x^2 = ay - y^2 = (a - y)\,y$. Folglich ist $RM^q = CR.RD$, eine erbare Eigenschaft des Cirkels, dessen Durchmesser CI

§.

§. 31.

Bey den Kegelschnitten heiße derjenige Punkt der Axe, dessen zugehörige Ordinate dem halben Parameter gleich ist, der Brennpunkt, focus.

§. 32.

Eine Linie, für welche bey rechtwinklichten Coordinaten $y^2 = px$ ist, heiße eine Parabel, und p ihr Parameter.

§. 33.

Die Ordinate der Parabel ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Parameter und der Abscisse; auch wird die Parabel von der Axe halbirt.

Denn aus der Gleichung folgt $p : y = y : x$, und $y = \mp\sqrt{px}$, das ist, jedem x kommt ein zweyfaches gleich großes y zu beyden Seiten der Axe zu.

§. 34.

Aufgabe. Eine Parabel zu verzeichnen. Fig. 210.

In der Abscissenlinie EG sey A der Anfang der Abscissen, CD in A senkrecht, $AE = p$, und eine beliebige Abscisse $x = AP$; auch schneide der Cirkel für den Durchmesser EP die CD in R und r: so ist $EA : AR = AR : AP$, das ist, $p : y = y : x$. Vollendet man nun die Parallelogramme AM, Am: so sind M und m Punkte in der Parabel. Sucht man nun dergleichen für jedes andre beliebige x, so nahe bey einander als man will; so kann man durch solche die krumme Linie aus freyer Hand ziehen.

§. 35.

In der Parabel verhalten sich die Abscissen wie die Quadrate der Ordinaten, und daher die Ordinaten wie die Quadratwurzeln der Abscissen. Fig. 210.

Man

Digitized by Google

Man nehme beliebig zwey Ordinaten PM, QV, für die Abscissen AP, AQ: so ist §. 32. $PM^q : AP. p$, und $QV^q = AQ. p$, folglich $PM^q : QV^q = AP. p : AQ. p = AP : AQ$, das ist, $y^2 : Y^2 = x : X$, folglich auch $y : Y = \sqrt{x} : \sqrt{X}$.

§. 36.

Der Scheitel der Parabel ist im Anfange der Abscissen A, und ihre beyden Schenkel AV, Av, divergiren von der Axe bis ins Unendliche. Fig. 210.

Denn ist $x = o$, so ist $y = \mp\sqrt{px} = o$, folglich A ein Punkt in der krummen Linie, von welcher daher die Axe daselbst geschnitten wird, so daß also A der Scheitel der Parabel ist. So lange nun x positiv bleibt, so wird $y = \mp\sqrt{px}$ oder die Ordinate immer größer, je größer man x annimmt, und man hat demnach zwey Schenkel AV, Av, die sich von der Axe immer mehr ohne Ende entfernen, so wie x ohne Ende wächst. So bald x negativ, das ist, auf der andern Seite von A, gesetzt wird, so wird $\sqrt{-px}$ unmöglich, daher die Parabel nur die beyden Schenkel AV, Av hat, das ist, nur auf der Seite nach G zu liegt.

§. 37.

In der Parabel beträgt der Abstand des Brennpunkts vom Scheitel, AF, den vierten Theil des Parameters; daher auch der Abstand eines jeden Punkts in der Parabel vom Brennpunkte, MF, der zu solchem Punkte gehörigen Abscisse AP nebst dem vierten Theile des Parameters gleich ist. Oder $AF = \frac{1}{4}p$, und $MF = x + \frac{1}{4}p$. Fig. 210.

Da §. 31. für den Brennpunct $y = \frac{1}{2}p$ so ist nach der Gleichung §. 32. $\frac{1}{4}p^2 = AF. p$, folglich $\frac{1}{4}p = AF$. Nun ist $MF^q = FP^q + PM^q = (AP - AF)^q + PM^q$.

Folg-

Folglich ist $MF^q = (x - \frac{1}{2}p)^2 + px = x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2 + px = x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$, folglich $FM = x + \frac{1}{4}p$.

§. 38.

Aufgabe. Eine Parabel noch auf leichtere Art zu verzeichnen. Fig. 210.

Von A trage man $Af = AF$, errichte auf der Axe Perpendikel, wie Mm, Vv, so viele und so nahe als man will, und schneide solche aus F mit den Weiten Pf, Qf u. s. w. so erhält man §. 37. die Punkte in der Parabel M, m, V, v, u. s. w. durch welche man die krumme Linie aus freyer Hand ziehet.

§. 39.

Eine Linie, für welche bey rechtwinklichten Coordinaten $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ ist, heiße eine **Ellipse**, p ihr **Parameter**, und a ihre große Axe.

Zusatz. Setzt man p bey der Parabel und Ellipse einerley: so ist bey der letzten y^2 um $\frac{px^2}{a}$ kleiner, als bey der ersten. Daher der Name **Parabel**, Gleichheit, und **Ellipse**, Mangel.———

§. 40.

Der eine Scheitel der Ellipse ist im Anfange der Abscissen A, der andre in einem Punkte der Abscissenlinie B, welcher vom Anfange um die große Axe entfernt ist. Auch wird die Ellipse von der Axe halbirt. Fig. 211.

Im Scheitel, wo die Axe von der Curve geschnitten wird, ist $y = 0$. Setzt man daher $0 = px - \frac{px^2}{a}$: so

ist

ist $\frac{px^2}{a} = px$, oder $\frac{x^2}{a} = x$, und dies findet statt, sowohl wenn $x = o$, als auch wenn $x = a$ ist, folglich in A und B. Auch ist nach der Gleichung $y = \pm r(px - \frac{px^2}{a})$.

§. 41.

In der Ellipse verhalten sich die Quadrate der Ordinaten wie die Rectangel aus den Abschnitten der großen Axe. Fig. 211.

Man nenne zwey Abscissen x, v, und die dazu gehörigen Ordinaten y, z: so ist $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, und $z^2 = pv - \frac{pv^2}{a}$, folglich $y^2 : z^2 = p\left(x - \frac{x^2}{a}\right) : p\left(v - \frac{v^2}{a}\right) = ax - x^2 : av - v^2 = x(a - x) : v(a - v)$.

Anmerkung. Im Cirkel ist das Quadrat jeder Ordinate dem Rectangel aus den Abschnitten der Axe gleich.

§. 42.

In der Ellipse heißt die mittlere Proportionallinie zwischen der großen Axe und dem Parameter die kleine Axe c, und ihr Durchschnitt mit der großen Axe der Mittelpunkt. Fig. 211.

Setzt man $x = \frac{1}{2}a$, so ist $CD = r(\frac{1}{2}ap - \frac{1}{4}ap) = r\frac{1}{4}ap = \frac{1}{2}rap$, folglich $Dd = c = rap$, oder $a : c = c : p$.

Zusatz. Demnach ist der Parameter die dritte Proportionallinie zur großen und kleinen Axe, oder $p = \frac{c^2}{a}$.

§. 43.

Aufgabe. Die kleine Axe in die Function der Ellipse zu bringen.

Digitized by Google

Da §. 42. Zus. $p = \frac{c^2}{a}$: so setze man diesen Werth anstatt p in die Gleichung §. 39. und man erhält $y^2 = \frac{c^2}{a} x - \frac{c^2}{a^2} x^2$.

Zusatz. Ist $a = c$, so ist auch $p = a$, und $y^2 = ax - x^2$, die Gleichung für den Cirkel, dessen Durchmesser a ist. Demnach kann man den Cirkel als eine Ellipse ansehen, deren große Axe, kleine Axe, und Parameter von gleicher Größe sind.

§. 44.

Aufgabe. Eine Function für die Ellipse aus dem Mittelpunkte zu formiren. Fig. 211.

Nennt man die Abscisse aus dem Mittelpunkte u: so ist nach der Gleichung §. 43. $x = \frac{1}{2}a - u$, und daher $x^2 = \frac{1}{4}a^2 - au + u^2$. Demnach ist $\frac{c^2}{a} x = \frac{1}{2}c^2 - \frac{c^2u}{a}$, und $\frac{c^2}{a^2} x^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u}{a} + \frac{c^2u^2}{a^2}$. Folglich ist $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$, die Gleichung aus dem Mittelpunkte.

§. 45.

Die Ordinaten der Ellipse zu beyden Seiten des Mittelpunkts sind kleiner als die Hälfte der kleinen Axe, nehmen desto mehr ab, je weiter sie sich vom Mittelpunkte entfernen, werden in den Scheiteln Null, und über die Scheitel hinaus unmöglich; daher die Ellipse eine in sich selbst zurückkehrende Curve ist.

Denn wenn $u = 0$, so ist §. 44. $y = \sqrt{\frac{1}{4}c^2} = \frac{1}{2}c$; in allen übrigen Fällen wird von $\frac{1}{4}c^2$ etwas subtrahirt, und zwar desto mehr je größer u ist, daher $y < \frac{1}{2}c$ wird.

Digitized by Google

wird. Setzt man $u = \frac{1}{2}a$, so wird $y = o$, und für $u > \frac{1}{2}a$, unmöglich.

§. 46.

Aufgabe. Den Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte der Ellipse zu finden. Solcher Abstand heiße e.

In der Gleichung §. 44. ist, wenn man $u = e$, oder $u^2 = e^2$ setzt, §. 31. $y = \frac{1}{2}p$, oder $y^2 = \frac{1}{4}p^2$, oder, weil §. 42. Zus. $p = \frac{c^2}{a}$ ist, $y^2 = \frac{c^4}{4a^2}$. Setzt man diese Werthe in die Gleichung: so erhält man $\frac{c^4}{4a^2} = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2}\cdot e^2$, folglich, wenn man mit $\frac{c^2}{a^2}$ dividirt, $\frac{c^2}{4} = \frac{1}{4}a^2 - e^2$, folglich $e^2 = \frac{1}{4}(a^2 - c^2)$.

Zusatz. 1. Die Ellipse hat also zwey Brennpunkte in der Axe, zu beyden Seiten des Mittelpunkts in gleicher Entfernung von demselben. Denn es ist $e = \mp\sqrt{\frac{1}{4}(a^2 - c^2)} = \mp\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$.

2. Der Abstand der Brennpunkte F, f, von einem Scheitel A, oder AF, Af, ist AC — CF, und AC + Cf, folglich $\frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$.

3. Da $FD^q = CF^q + CD^q = \frac{a^2 - c^2}{4} + \frac{c^2}{4}$: so ist der Abstand der Brennpunkte vom Endpunkte der kleinen Axe $FD = fD = \sqrt{\frac{a^2 - c^2 + c^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}a$.

4. Aus $e^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4}$ folgt $\frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{4} - e^2$, folglich $c^2 = a^2 - 4e^2$.

Digitized by Google

§. 47.

Ziehet man von jedem beliebigen Punkte der Ellipse M, gerade Linien nach den Brennpunkten, MF, Mf: so ist die Summe dieser Linien, MF + Mf, der großen Axe AB, gleich. Fig. 211.

Erstlich ist $MF^q = FP^q + PM^q = (CF - CP)^q + PM^q$. Nun ist §. 46. $CF = r\frac{a^2 - c^2}{4}$ und §. 44. $CP = u$, daher $CF - CP = r\frac{a^2 - c^2}{4} - u$, daher $(CF - CP)^q = \frac{a^2 - c^2}{4} - 2u\,r\frac{a^2 - c^2}{2} + u^2$; aber §. 44. $RM^q = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2}u^2$. Folglich ist $MF^q = \frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4} - u\,r(a^2 - c^2) + u^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{a^2}u^2$. Nun ist $u^2 - \frac{c^2}{a^2}u^2 = \frac{a^2u^2 - c^2u^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}u^2$. Folglich ist $MF^q = \frac{a^2}{4} - u\,r(a^2 - c^2) + \frac{a^2 - c^2}{a^2}u^2$, folglich $MF = \frac{1}{2}a - \frac{u\,r(a^2 - c^2)}{a}$.

Zweytens ist auf eben die Art $Mf^q = fP^q + PM^q = (Cf + CP)^q + PM^q$, und man findet die vorige Formel, nur daß + statt − stehet, so daß also $Mf = \frac{1}{2}a + \frac{u\,r(a^2 - c^2)}{a}$.

Demnach ist $MF + Mf = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$.

Zusatz. Alle Triangel, wie FMf, FDf, u. s. w. haben demnach einerley Umfang; aber unter allen diesen hat $\triangle FDf$ den größten Inhalt, weil er die größte Höhe CD hat.

§. 48.

Digitized by Google

§. 48.

Aufgabe. Eine Ellipse zu verzeichnen. Fig. 211.

Es sey AB die große Axe, F, f, die Brennpunkte; oder, wenn beyde Axen gegeben sind, folglich daraus $o = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$, gefunden, und hiedurch die Brennpunkte F, f, bestimmt sind: so beschreibe man aus F mit $z = FM$ einen Cirkel, desgleichen aus f mit $a - z = fM$. Demnach ist §. 47. der Durchschnitt dieser Cirkel M, m, ein Punkt in der Ellipse, und man findet, wenn man z ändert, deren mehrere, durch welche man die Curve aus freyer Hand ziehet.

Zusatz. Befestiget man einen Faden von der Länge der großen Axe mit seinen Enden in F und f, und dehnt solchen mit einem Stifte in die Lagen wie FMf aus: so beschreibt der Stift die Ellipse.

§. 49.

Ist der Parameter bey einer Parabel und Ellipse einerley: so sind ihre Ordinaten um desto weniger von einander unterschieden, je größer die Axe der Ellipse ist, und je näher solche dem Scheitelpunkte kommen. Fig. 211.

Für die Parabel ist §. 32. $y^2 = px$; für die Ellipse §. 39. $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, folglich die Ordinaten um die Größe $\frac{px^2}{a}$ unterschieden, welche offenbar desto kleiner ist, je größer a, oder je kleiner x ist.

Zusatz. x kann bis ins unendliche wachsen, folglich $\frac{px^2}{a}$ bis ins unendliche abnehmen, wo es ganz verschwindet. Alsdenn ist für die Ellipse $y^2 = px - o = px$,

Digitized by Google

wie bey der Parabel. Daher sagt man der Bogen einer Ellipse von unendlicher Axe ist mit dem Bogen einer Parabel einerley, welches desto mehr zutrift, je näher solcher Bogen dem Scheitel ist.

Anmerkung. Nennt man die Ordinate der Parabel z, der Ellipse y: so ist $z^2 - y^2 = \frac{px^2}{a^2}$, oder $(z + y)(z - y) = \frac{px^2}{a}$, folglich $z - y = \frac{px^2}{a(z+y)}$, woraus die weitern Schlüsse leicht gezogen werden können.

§. 50.

Eine Linie, für welche bey rechtwinklichten Coordinaten $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ ist, heiße eine Hyperbel, p ihr Parameter, und a ihre Zwergaxe.

Zusatz. 1. Setzt man in der Gleichung für die Ellipse $-a$ anstatt $+a$: so erhält man die Gleichung für die Hyperbel.

2. Da hier zu dem px der Parabel ein Zusatz $\frac{px^2}{a}$ kommt: so entstand der Name Hyperbel.

§. 51.

Der eine Scheitel der Hyperbel ist im Anfange der Abscissen A, der andre in einem entgegengesetzten Punkte der Abscissenlinie B, welcher vom Anfange um die Zwergaxe entfernt ist. Fig. 212.

Im Scheitel, wo die Axe von der krummen Linie geschnitten wird, ist $y = 0$, folglich $0 = px + \frac{px^2}{a}$, welches statt findet, so wohl wenn $x = 0$, als auch wenn $x =$

$x = -a$ ist, folglich in A und B. Denn im letztern Falle ist $o = -ap + ap$; im ersten ist es an sich klar.

§. 52.

Die Hyperbel hat vier Schenkel, wovon je zwey in entgegengesetzter Richtung von jedem Scheitel ohne Ende ausgehen. Fig. 212.

Sind die Abscissen positiv: so ist aus der Gleichung offenbar, daß $\pm y$ mit x zugleich ohne Ende wachsen müsse, daß also die Hyperbel zur rechten zwey Schenkel habe, welche von der verlängerten Axe ohne Ende divergiren. Sind die Abscissen negativ, so wird die Gleichung $y^2 = -px + \frac{px^2}{a}$, worinn der erste Theil negativ, der zweyte positiv ist. Ist nun $x < a$, so wird der positive Theil kleiner; ist $x > a$, so wird der positive Theil gröſſer, als der negative. Im ersten Falle ist der Rest negativ, folglich die Quadratwurzel daraus, oder y unmöglich; im zweyten Falle ist der Rest positiv, folglich die Quadratwurzel daraus, oder y möglich, und desto gröſſer, je gröſſer x ist. Demnach giebt es keine Ordinaten zwischen A und B; von B an aber fangen wieder Ordinaten an, die mit x zugleich ohne Ende wachsen, daß also die Hyperbel zur linken gleichfalls zwey Schenkel hat, welche von der verlängerten Axe ohne Ende divergiren.

§. 53.

Bey der Hyperbel heiße gleichfalls die mittlere Proportionallinie zwischen der Zwergaxe und dem Parameter die kleine Axe c. Denkt man sich solche wie §. 42. als eine Ordinate im Mittelpunkte C: so ist sie unmöglich.

Digitized by Google

Man setze $x = \frac{1}{2}a$: so ist $y^2 = -\frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}ap = -\frac{1}{4}ap$, folglich $y = \mp\frac{1}{2}\sqrt{-ap}$, folglich $2y = c = \sqrt{-ap}$, welche Größe als Ordinate der Hyperbel unmöglich, aber an sich selbst wohl möglich, und die mittlere Proportionallinie zwischen a und p ist.

Zusatz. Demnach ist $c^2 = ap$, folglich $p = \frac{c^2}{a}$.

§. 54.

Aufgabe. Die kleine Axe in die Function der Hyperbel zu bringen.

Setzt man den §. 53. Zus. gefundnen Werth $\frac{c^2}{a}$ anstatt p in die Gleichung: so erhält man $\frac{c^2}{a}x + \frac{c^2}{a^2}x^2 = y^2$.

§. 55.

Aufgabe. Eine Function für die Hyperbel aus dem Mittelpunkte zu formiren. Fig. 212.

Nennt man CP, die Abscisse aus dem Mittelpuncte, u: so ist in der Gleichung §. 54. $x = u - \frac{1}{2}a$, und daher $x^2 = u^2 - au + \frac{1}{4}a^2$. Demnach ist $\frac{c^2}{a}x = \frac{c^2u}{a} - \frac{1}{2}c^2$, und $\frac{c^2}{a^2}x^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2u}{a} + \frac{1}{4}c^2$. Folglich ist $y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$, die Gleichung aus dem Mittelpunkte.

§. 56.

Aufgabe. Den Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte der Hyperbel zu finden. Solcher Abstand heiße e.

In der Gleichung §. 55. ist, wenn man $u = e$, und daher $u^2 = e^2$ setzt, §. 31. $y = \frac{1}{2}p$, und daher $y^2 = \frac{1}{4}p^2$, oder,

Digitized by Google

oder, weil §. 53. Zus. $p = \frac{c^2}{a}$ ist, $y^2 = \frac{c^4}{4a^2}$. Setzt man diese Werthe in die Gleichung: so erhält man $\frac{c^4}{4a^2} = \frac{c^2}{a^2} \cdot e^2 - \frac{1}{4}c^2$, folglich, mit $\frac{c^2}{a^2}$ dividirt, $\frac{1}{4}c^2 = e^2 - \frac{1}{4}a^2$, folglich $\frac{c^2 + a^2}{4} = e^2$, folglich $e = \mp \frac{1}{2}\sqrt{(c^2 + a^2)}$.

§. 57.

Ziehet man von jedem beliebigen Punkte der Hyperbel M, gerade Linien nach den Brennpunkten, MF, Mf: so ist die Differenz dieser Linien, Mf — MF, der Zwergaxe AB, gleich. Fig. 212.

Auf eben die Art wie §. 47. erhält man $fM = \frac{u\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} + \frac{1}{2}a$, und $FM = \frac{u\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} - \frac{1}{2}a$, folglich $fM - FM = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$.

§. 58.

Aufgabe. Eine Hyperbel zu verzeichnen. Fig. 212.

Hat man die Brennpunkte F, f, bestimmt: so construire man über Ff einen Triangel, deren Seiten z, und $a - z$, was auch für Größe z habe. Die Spitzen dieser Triangel geben §. 57. die Punkte, durch welche man die Hyperbel aus freyer Hand ziehet.

§. 59.

Errichtet man in einem Scheitel der Hyperbel A eine gerade Linie DE auf der Axe senkrecht, und macht solche zu beyden Seiten der halben kleinen Axe gleich: so heißen die geraden Linien, deren Lage durch den Mittelpunkt der Hyperbel C, und die Endpunkte ge-

dachter Linie, D, E, bestimmt ist, die Asymptoten. Fig. 212.

§. 60.

Die Asymptoten nähern sich der Hyperbel ohne Ende, ohne sie jemals zu treffen. Fig. 212.

Es sey PM = y, PR = z. Auch ist CA = $\frac{1}{2}$a, AD = $\frac{1}{2}$c = $\frac{1}{2}\sqrt{}$ap, CP = $\frac{1}{2}$a + x. Nun ist CA : AD = CP : PR. Folglich ist $\frac{1}{2}$a : $\frac{1}{2}\sqrt{}$ap = $\frac{1}{2}$a + x : z, folglich quadrirt, $\frac{1}{4}$a² : $\frac{1}{4}$ap = $\frac{1}{4}$a² + ax + x² : z², folglich $z^2 = \frac{\frac{1}{4}a^3p + a^2px + apx^2}{a^2} = \frac{1}{4}ap + px + \frac{px^2}{a}$. Nun ist $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$. Folglich ist $z^2 - y^2 = \frac{1}{4}ap = \frac{c^2}{4}$, oder $(z+y)(z-y) = \frac{c^2}{4}$; folglich $z - y = \frac{c^2}{4(z+y)}$, welche Differenz immer kleiner wird, je größer 4(z + y) ist, (das ist, je größer die Ordinate wird, folglich je weiter sie sich vom Scheitel entfernt) aber nie verschwindet.

§. 61.

Ziehet man aus dem Scheitel der Hyperbel A eine gerade Linie AG dem Grundtheil der Asymptote, CD, parallel: so ist solche die Hälfte solches Grundtheils. Das Quadrat dieser Linie heißt die Potenz der Hyperbel. Fig. 212.

Da AG der CD parallel: so ist EA : ED = AG : CD. Nun ist EA = $\frac{1}{2}$ED. Folglich ist auch AG = $\frac{1}{2}$CD, folglich $AG^q = \frac{1}{4}CD^q$. Und dies ist die Potenz der Hyperbel.

§. 62.

Die Potenz der Hyperbel ist dem sechzehnten Theile von der Summe der Quadrate beyder Axen gleich. Fig. 212.

Denn

Digitized by Google

Denn es ist $CD^q = CA^q + AD^q = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 = \frac{a^2+c^2}{4}$, folglich $AG^q = \frac{1}{4}GD^q = \frac{a^2+c^2}{16}$.

§. 63.

Aufgabe. Eine Gleichung der Hyperbel zwischen den Asymptoten zu formiren. Fig. 212.

Man ziehe MQ der Asymptote Cr parallel. Nun ist auch Rr der DE parallel. Folglich ist $\triangle RQM \sim RCr \sim CDE$, und $ED : DC = RM : RQ = Mr : CQ$, auch $DE : EC = RM : QM$. Folglich ist $CQ = \frac{Mr \cdot DC}{ED}$, und $QM = \frac{RM \cdot EC}{ED}$. Nun ist $Mr = z + y$, $MR = z - y$, auch $DC = EC = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{4}}$, und $ED = c$. Folglich ist $CQ \cdot QM = \frac{(z+y)(z-y)\left(\frac{a^2+c^2}{4}\right)}{c^2}$. Nun ist $(z+y)(z-y) = z^2 - y^2 = \frac{1}{4}c^2$. Folglich ist $CQ \cdot QM = \frac{\frac{1}{4}c^2}{c^2} \cdot \frac{a^2+c^2}{4} = \frac{a^2+c^2}{16}$, der Potenz der Hyperbel §. 62. Siehet man nun CQ, QM, als Coordinaten an, und setzt $CQ = p$, $QM = q$: so ist $pq = \frac{a^2+c^2}{16}$ die Gleichung der Hyperbel zwischen den Asymptoten, wobey der Coordinatenwinkel MQR dem Asymtotenwinkel DCE gleich ist.

Anmerkung. Hiernach kann man für jedes p die Größe $q = \frac{a^2+c^2}{16p}$ finden, und die Punkte der Curve, wie M, bestimmen.

§. 64.

Digitized by Google

§. 64.

Eine gleichseitige Hyperbel ist, deren Axen einander, und daher auch dem Parameter gleich sind. Fig. 212.

Zusatz. 1. Da hier $c = a$, folglich $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}a$, das ist $DA = AC$, folglich $DCA = 45°$, und daher $DCE = 90°$, so heißt die gleichseitige Hyperbel auch rechtwinklicht.

2. Setzt man in den gefundnen allgemeinen Gleichungen für die Hyperbel a anstatt c: so erhält man die Gleichungen für die rechtwinklichte Hyperbel. Hiernach ist die Hauptgleichung §. 50. $y^2 = ax + x^2$; die Gleichung aus dem Mittelpunkte §. 55. $y^2 = u^2 - \frac{x}{4}a^2$; die Gleichung zwischen den Asymptoten §. 63. $q = \frac{2a^2}{16p} = \frac{a^2}{8p}$.

§. 65.

Eine Linie, für welche bey rechtwinklichten Coordinaten $y^2 = \frac{x^3}{a - x}$ ist, heiße die Cissoide des Diokles.

Eine Linie, für welche $y = x$ ist, wobey x einen Cirkelbogen bedeutet, heiße die Cycloide, oder Radlinie.

Anmerkung. Die Ausführung dieser und andrer Linien bleibt in den ersten Elementen ausgesetzt, und sind solche nur als Beyspiele angeführt worden, daß es außer den Kegelschnitten noch andre Linien gebe, welche ganz andre Functionen bestimmen.

IV. Allgemeine Betrachtung der Linien.

§. 66.

Der Hauptunterschied der Functionen beruhet auf der verschiednen Art, wie die veränderlichen Größen in der Function, oder in der Gleichung, wodurch die Function

Digitized by Google

Function gegeben ist, vorkommen. Hiernach ist die Function

1. Irrational, oder rational, je nachdem die veränderliche Größe irgendwo unter dem Wurzelzeichen vorkommt, oder nicht.

2. Gebrochen oder ganz, je nachdem die veränderliche Größe irgendwo im Nenner eines Bruchs vorkommt, oder nicht.

3. Einförmig und vielförmig, je nachdem die veränderliche Größe einen oder mehrere Werthe hat, das ist, in der ersten, oder in höhern Dimensionen vorkommt (§. 18.)

4. Gleichartig, und ungleichartig, je nachdem die veränderliche Größen in allen Gliedern einerley Dimension haben oder nicht; da denn im letztern Fall die Ordnung nach der höchsten Dimension bestimmt wird (§. 18.)

5. Algebraisch und trascendentisch, je nachdem die veränderliche Größe eine bestimmte oder eine ganz unbestimmte Anzahl von Werthen hat.

So ist z. E. $ax^2 - cy^2$ rational; $az - x^2\sqrt{(a^2 - xy)}$ irrational; beyde ganz; $\frac{x^2}{a-x}$ gebrochen; $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3$, gleichartig; $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f$, ungleichartig; alle algebraisch; $a \log. y + b \sin. x + c \tang. (x - y)$ transcendentisch.

Zusatz. Die Function ist algebraisch, wenn zu jedem x eine bestimmte Menge von y, so viel Abmessungen nämlich y hat, gehören; in einer transcendenten Function hingegen gehören zu einem x unzählig viele y, die aber zum Theil möglich, zum Theil unmöglich seyn können. Sie heißt trapscendent, weil die veränderlichen

lichen Größen von Dingen abhängen, als von Cirkelbogen, Logarithmen, und dergleichen, welche außerhalb dem Gebiete der Algebra liegen.

§. 67.

Nach dem Unterschiede der Functionen, wodurch Linien bestimmt sind, werden letztre auch in verschiedne Arten und Familien, oder Geschlechter und Ordnungen eingetheilt. Denn je nachdem solche Functionen algebraisch, oder transcendentisch sind, werden auch die Linien algebraisch, oder transcendentisch; jene von einer bestimmten oder endlichen, diese von einer unbestimmten oder unendlichen Ordnung.

Zu den algebraischen Linien der ersten Ordnung gehört allein die gerade Linie; der zweyten Ordnung, der Cirkel, und die Kegelschnitte; der dritten die Cissoide des Diokles. Zu den transcendenten Linien gehört die Cycloide oder Radlinie.

Zusatz. Transcendente Linien geben für jedes x eine unzählige Menge von y, und können daher von einer geraden Linie in unzähligen Punkten geschnitten werden, obgleich daraus nicht folgt, daß sie auch wirklich in unzähligen Punkten immer geschnitten werden; indem es sich wohl treffen könnte, daß eine bestimmte Menge von Durchschnittspunkten möglich, die übrigen alle unmöglich wären. Denn gehörten zu jedem x eine bestimmte Menge von y: so müßte sich solches durch eine algebraische Gleichung zwischen beyden angeben lassen, die nicht höher als auf den Grad dieser Menge steigen könnte; und hätte man alsdenn eine algebraische Linie.

Digitized by Google

§. 68.

Krumme Linien heißen ähnlich, wenn die beständigen Größen ihrer Functionen, oder auch die jenen proportionirten veränderlichen Größen, einerley Verhältniß haben.

So sind Ellipsen einander ähnlich, wenn ihre Axen einander, oder den Parametern proportionirt sind, so daß, wenn man in ihnen Abscissen in der Verhältniß der grossen, oder der kleinen Axen, oder der Parameter nimmt, alsdenn die zugehörigen Ordinaten eben die Verhältniß haben. Gleiches gilt auch von den Hyperbeln. Man erhält dergleichen ähnliche Ellipsen oder Hyperbeln, wenn man ihre Schnitte unter gleichen Winkeln macht. Daher sind auch alle Parabeln, und alle Cirkel, und überhaupt alle Linien, deren Function nur eine beständige Größe enthält, einander ähnlich.

§. 69.

Die Construction, Verzeichnung, einer Function oder Gleichung erfodert, ihren geometrischen Ort darzustellen, das ist, Linien zu verzeichnen, welche ihre Wurzeln vorstellen; wodurch also jede Aufgabe, von welcher Natur sie auch sey, wenn sie auf eine Gleichung gebracht ist, und man sich die darinn vorkommenden Größen unter geraden Linien gedenkt, geometrisch, das heißt, durch ausgedehnte Größen aufgelößt wird.

Zusatz. 1. Hiezu theilten die Alten ihre Aufgaben in ebene, *plana;* in körperliche, *solida;* und in solche die weder eben noch körperlich sind, *linearia;* wovon erstere durch Linien in einer Ebene, also durch die gerade Linie und den Cirkel; mittlere, durch Linien auf einem Körper, dergleichen die Kegelschnitte sind; und letztre durch

Digitized by Google

durch Linien aufgelöst werden, die zusammengesetzter als die Kegelschnitte sind.

2. Ueberhaupt werden dergleichen Constructionen in geometrische, und in mechanische oder transcendente eingetheilt, je nachdem sich solche nach Vorschrift der reinen Geometrie, oder nicht bewerkstelligen lassen. Ihre Simplicität aber beruhet nicht auf der einfachern Gleichung, sondern auf der einfachern Verzeichnung der dazu erfoderlichen Linien; daher man zur Construction z. E. den Cirkel der Parabel, deren Gleichung doch einfacher ist, vorziehet.

Digitized by Google

Dritter Abschnitt.

Die höhere Analysis oder die Analysis des Unendlichen.

1. Von der Differentialrechnung
2. Von der Integralrechnung.

Erstes Kapitel.

Von der Differentialrechnung.

I. Natur der Differentiale.

§. 1.

Aufgabe. Es soll eine Größe, die kleiner ist, als jede gegebene noch so kleine Größe A, quantitas omni dabili minor, gefunden werden. Fig. 213.

Man nehme eine beliebige Größe BC, und mache von A ein Vielfaches, DG > BC. Nimmt man nun von BC die Hälfte BH, und von DG weniger als die Hälfte DE: so ist der Rest HC < EG. Nimmt man von HC die Hälfte HK, und von EG die Hälfte EF: so ist der Rest FC < FG. Nun ist FG = A. Folglich ist KC < A.

Zusatz. 1. Wäre die gegebene Größe auch die allerkleinste, die man nur geben kann: so läßt sich doch eine Größe darstellen, welche noch kleiner ist; wovon man auch ein Beyspiel an dem Winkel ABL siehet, welchen Fig. 214. die Tangente eines Cirkels mit dem Bogen im Berührungspunkte einschließt, und welcher kleiner ist,

als jeder auch noch so kleine geradlinichte Winkel. Denn gäbe es einen noch kleinern Winkel: so müßte zwischen der Tangente AB, und dem Bogen BL, eine gerade Linie fallen, welches III. §. 80. unmöglich ist.

2. Selbst eine solche Größe, welche kleiner ist, als das allerkleinste, läßt sich ohne Ende in noch kleinere Theile theilen. Es sey nämlich Fig. 214. BL aus C mit den Halbmesser CB gezogen, und AB eine Tangente in B: so ist nach Obigen ABL kleiner als der allerkleinste geradlinichte Winkel. Verlängert man nun BC, und ziehet aus entferntern Punkten D, E, u. s. w. die Bogen BM, BN, u. s. w. so ist offenbar, daß ABM < ABL; ABN < ABM u. s. w. ohne Ende sey.

§. 2.

Jede endliche Größe mit einer unendlichen dividirt, giebt Null; und mit Null dividirt, eine unendliche Größe zum Quotienten.

Jeder Bruch wird bey einerley Zähler desto kleiner, je größer sein Nenner ist, verschwindet aber, so groß auch immer der Nenner seyn mag, nicht eher gänzlich, als bis der Nenner unendlich groß ist. Z. E. die Brüche $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ ..... $\frac{1}{\infty}$ (wo durch ∞ ein unendlich Großes, quantitas omni dabili maior, dergleichen z. E. die Tangente des rechten Winkels ist, bezeichnet wird) werden immer kleiner und kleiner, so wie ihre Nenner größer werden, behalten aber immer noch einigen Werth, so klein solcher auch seyn mag. Eben dies heißt mit andern Worten: aus diesen Brüchen wird Null, wenn der Nenner unendlich groß ist, oder der Bruch $\frac{1}{\infty}$ ist ein wirkliches Nichts, $\frac{1}{\infty} = 0$, wodurch man nichts anders sagt, als daß ein Bruch nicht eher

eher Nichts werden könne, als bis der Nenner ins Unendliche vermehrt worden sey.

Siehet man demnach o als den Quotienten an, welcher entstehet, wenn man den Dividendus 1, mit dem Divisor ∞, dividirt, das ist, setzt man $\frac{1}{\infty} = o$: so muß nach den Regeln der Division, nach welchen man beliebig den Quotienten und Divisor mit einander verwechseln kann, $\frac{1}{o} = \infty$ seyn, das ist, der Dividendus 1, mit dem Divisor o, dividirt zum Quotienten eine unendlich große Zahl geben; wodurch wiederum nichts anders angezeigt wird, als daß die Null in der Einheit, oder in einer Zahl, unendlichemal enthalten sey, oder daß aus Null nie die Einheit oder eine Zahl werden könne.

Zusatz. Ein solcher Theil von einer Größe, als der Bruch $\frac{1}{\infty}$ anzeigt, heißt ein unendlich kleiner Theil solcher Größe, und ist ein wirkliches Nichts. Der Bequemlichkeit wegen zeigt man ihn auch durch den Buchstaben d an.

§. 3.

Gedenkt man sich das unendlich Große, oder unendlich Kleine zu Potenzen erhoben: so heißen solche die Ordnungen des Unendlichen; wodurch man folgende Progreßionen erhält:

$$o,\ 1,\ \infty^1,\ \infty^2,\ \infty^3 \ldots\ldots$$
$$\infty,\ 1,\ \frac{1}{\infty},\ \frac{1}{\infty^2},\ \frac{1}{\infty^3} \ldots\ldots$$

Denn so wie man sich §. 2. $\frac{1}{o}$ gedenken kann, so läßt sich auch $\frac{n}{o}$ oder $n.\frac{1}{o} = n.\infty$; folglich auch $\infty.\infty = \infty^2$ gedenken. Demnach läßt sich $\frac{1}{\infty}$ und $\frac{1}{n.\infty}$,

Digitized by Google

$\frac{1}{n.\infty}$, folglich auch $\frac{1}{\infty.\infty} = \frac{1}{\infty^2}$ gedenken. Zugegeben also, daß dergleichen Potenzen des Unendlichen etwas Unmögliches wären, welches die Metaphysik untersuchen mag; so läßt sich doch dieses, was es auch seyn möge, eben so richtig und genau in der Mathematik bezeichnen, als die unmöglichen und eingebildeten Größen, dergleichen $\sqrt{-x}$ ist, sind bezeichnet worden. Und so, wie von dieser Bezeichnungsart im Vorhergehenden ist Gebrauch gemacht worden; so wird auch der Gebrauch von jener sich in der Folge zeigen.

Nun ist nach den Gesetzen der Progreßion $0 : 1 = 1 : \frac{1}{0}$ und §. 2. $\frac{1}{0} = \infty$; ferner $1 : \infty = \infty : \infty^2$ u. s. w. Dies giebt die erste Progreßion.

Eben so ist $\infty : 1 = 1 : \frac{1}{\infty}$, und $1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$ u. s. w. Dies giebt die zweyte Progreßion.

Zusatz. Aus der Proportion $\infty : 1 = 1 : \frac{1}{\infty}$ folgt $\frac{1}{\infty}.\infty = 1$, oder das unendlich Kleine mit dem unendlich Großen multiplicirt, giebt was Endliches, das heißt, das unendliche Kleine ist in dem Endlichen unendlichemal enthalten. Und aus der Proportion $0 : 1 = 1 : \infty$ folgt $\frac{1}{0} = \infty$, das heißt, daß die Null in dem Endlichen unendlichemal enthalten sey; welches eben das sagt. Man vergleiche hiemit §. 2.

Anmerkung. Den Ordnungen des unendlich Kleinen kann §. 1. Zus. 1. 2. zur Erläuterung dienen.

§. 4.

Eine Größe verschwindet gegen eine andre Größe, wenn sie solche weder vermehrt noch vermindert. Demnach verschwindet

1. die

Digitized by Google

1. Die Null gegen jede endliche Größe, weil $n \mp 0 = n$.

2. Jede endliche Größe gegen das unendlich Große der ersten Ordnung, und das unendlich Große einer niedrern Ordnung gegen das unendlich Große einer höhern. Denn es ist $0 : 1 = 1 : \infty^1 = \infty^1 : \infty^2$ u. s. w.

3. Das unendlich Kleine der ersten Ordnung gegen jedes Endliche, und das unendlich Kleine einer höhern Ordnung gegen das unendlich Kleine einer niedrern. Denn es ist $\infty : 1 = 1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$ u. s. w.

§. 5.

Das Differential einer veränderlichen Größe x, welche um einen unendlich kleinen Theil wächst oder abnimmt, ist der Unterschied zwischen ihren anfänglichen und dem auf die Veränderung folgenden Zustande; daher kein Differential einer beständigen Größe a, statt findet.

Eben so wie $\frac{x}{n} = \frac{1}{n} x$, oder der nte Theil von x ist: so ist auch $\frac{x}{\infty} = \frac{1}{\infty} x = dx$ ein unendlich kleiner Theil von x. Nun wird aus x durch das Wachsen oder Abnehmen $x \mp dx$. Folglich ist $(x \mp dx) - x = \mp dx$ das Differential der veränderlichen Größe x.

Bey einer beständigen Größe a, welche unverändert bleibt, ohne weder zu wachsen noch abzunehmen, ist der anfängliche Zustand a, und der nachmalige a. Daher ist $a - a = 0$, folglich $da = 0$, wodurch man anzeigt, daß es kein Differential einer beständigen Größe gebe.

Digitized by Google

Zusatz. 1. Das Differential einer veränderlichen Größe dx, oder $\frac{x}{\infty}$ ist zwar §. 2. auch = o, aber in einem andern Sinne als da = o. Durch jenes wird angezeigt, daß das Differential einer veränderlichen Größe statt finden könne, und sein Werth Null sey, das heißt, sich durch keine endliche Zahl ausdrücken lasse; durch dieses giebt man zu erkennen, daß das Differential einer beständigen Größe gar nicht statt finden könne, und daher ganz wegfallen müsse.

2. Die Ordnungen der Differentiale werden durch d, d^2, d^3, d^4 u. s. w. angezeigt. Denn ist dx eine beständige Größe: so hat solche kein Differential; ist sie aber veränderlich: so ist ihr Differential $\frac{dx}{\infty} = \frac{1}{\infty} dx =$ ddx = d^2x, wo d^2 statt $\frac{1}{\infty^2}$, und überhaupt d^n statt $\frac{1}{\infty^n}$ gesetzt wird.

3. Das Zeichen des Differentials d, gehet nur auf die unmittelbar folgende Größe, und nicht einmal auf ihren Exponenten, vielweniger auf die mit ihr verbundnen Größen, wofern nicht alles zugleich in einer Parenthese eingeschlossen ist. Daher hat man folgende Ausdrücke wohl zu unterscheiden: dx^m, das Differential von x zu der Potenz m erhoben; $d(x^m)$ das Differential von x^m; und $d^m x$, das mte Differential von x. Eben so ist $d(ax - x^2)^m$; $d(\overline{ax - x^2}^m)$; $d^m(ax - x^2)$ unterschieden.

4. Da dx = o, und dy = o, so würde aus dem Differential einer jeden einzelnen Größe an sich gar nichts folgen, und sich daraus nicht das geringste ableiten lassen. Allein man sucht auch nie das Differential irgend einer einzel-

Digitized by Google

einzelnen veränderlichen Größe anders, als in der Absicht, um solches mit dem Differential einer andern veränderlichen Größe zu vergleichen. Denn obgleich das Differential beyder Null ist, das heißt, sich durch keine endliche Größe ausdrücken läßt: so ist es doch möglich, daß solche Differentiale eine endliche Verhältniß haben können, auf eben die Art wie irrationale Größen eine rationale Verhältniß verstatten können; indem z. E. $\sqrt{12} : \sqrt{27} = \sqrt{4.3} : \sqrt{9.3} = 2\sqrt{3} : 3\sqrt{3} = 2 : 3$.

5. Nach dem Gesetze der Stetigkeit kommt keine Größe x, aus einem Zustand in den andern, ohne zuvor alle Zwischenstände betreten zu haben, und ihr nächstfolgender Zustand, in den sie zuerst tritt, muß derjenige seyn, zwischen dem sich kein andrer mehr denken läßt, dessen Unterschied vom anfänglichen daher durch keine endliche Größe ausgedrückt werden kann, welches sonst dem Begriffe des nächstfolgenden Zustandes widersprechen würde. Demnach ist dx, wodurch man solchen Unterschied anzeigt, in der That = 0, oder, welches hier der Sinn ist, läßt sich durch keine endliche Größe ausdrücken. Zeigte man nun den Unterschied eines weiter folgenden Zustandes vom anfänglichen durch Dx an, welches also eine endliche Größe ist: so ist offenbar, daß dieses Dx von dem dx abhängen müsse, und daß ein gleiches bey einer andern Größe von Dy und dy gelte. Sind nun x und y wie z. E. die Abscissen und Ordinaten in einer gewissen abhängigen Verhältniß, so sind auch Dx, Dy, und folglich auch dx, dy, in einer gewissen abhängigen Verhältniß, was es auch für eine sey, und was für Größen auch dx, dy, seyn mögen.

§. 6.

Aufgabe. Das Differential einer jeden Function zu finden.

Digitized by Google

In der gegebenen Function setze man statt des anfänglichen Zustandes der veränderlichen Größen ihren nächstfolgenden Zustand, formire hieraus die Function aufs neue, und subtrahire davon die gegebene Function: so ist §. 5. der Rest das gesuchte Differential, worinn §. 4. die höhern Differentiale gegen die niedrigern verschwinden.

Z. E. d (ax^2) werde verlangt. In der gegebenen Function axx setze man $x + dx$ anstatt x, so erhält man $a(x^2 + 2xdx + dx^2)$, oder $ax^2 + 2axdx + adx^2$. Subtrahirt man hievon die gegebene Function ax^2: so ist der Rest $2axdx + adx^2$, worinn dx^2 gegen dx verschwindet. Demnach ist das gesuchte Differential, oder $d(ax^2) = 2axdx$.

Auf eben die Art, wenn man die Function $ax - yx$ differentiiren solte, setzt man $x + dx$ statt x, und $y + dy$ statt y, da denn $a(x + dx) - (y + dy)(x + dx) = ax + adx - xy - ydx - xdy - dxdy$. Subtrahirt man hievon die gegebene Function: so ist der Rest $adx - ydx - xdy - dxdy$, worinn dxdy verschwindet. Demnach ist das gesuchte Differential, oder $d(ax - yx) = adx - ydx - xdy$.

§. 7.

Die Differentialrechnung, calculus differentialis, ist die Methode, aus den gegebenen veränderlichen Größen, oder deren Functionen, die Differentiale von jeder Ordnung zu finden, um aus den Verhältnissen derselben unbekannte Größen abzuleiten. Man nennt solche insbesondre die Exponentialrechnung, wenn sie sich mit Größen, welche veränderliche Exponenten haben, beschäftigt. Alle übrige Größen, die nicht Exponentialgrößen sind, kann man im Gegensatz gemeine Größen nennen.

II. Dif-

Digitized by Google

II. Differentiirung gemeiner Größen.

§. 8.

Aufgabe. Das Differential einfacher Größen zu finden.

Man seze jeder dieser Größen mit Beybehaltung ihres Zeichens den Buchstaben d vor, und lasse, wenn beständige Größen dabey mit vorkommen, solche hinweg. Z. E. $d(x+a-y) = dx + 0 - dy = dx - dy$.

Denn seßt man in der gegebenen Function $x + dx$ statt x, und $y + dy$ statt y: so erhält man $x + dx + a - y - dy$, und, hievon die gegebene Function subtrahirt, zum Reste $dx - dy$. Demnach ist §. 6. $d(x + a - y) = dx - dy$.

§. 9.

Aufgabe. Das Differential eines Products zu finden.

Man multipliçire jeden der beyden Factoren mit dem Differential des andern, und addire beyde Producte Z. E. $d(xy) = xdy + ydx$.

Denn seßt man $x + dx$ statt x, und $y + dy$ statt y: so erhält man $(x + dx)(y + dy) = xy + xdy + ydx + dxdy$. Hievon die gegebene Function subtrahirt, giebt zum Reste $xdy + ydx + dxdy$, worinn $dxdy$ verschwindet. Demnach ist §. 6. $d(xy) = xdy + ydx$.

Zusatz. 1. Wäre einer der Factoren eine beständige Größe: so fällt das Glied, worinn sein Differential vorkommen müßte, weil dieses 0 wäre, hinweg. So ist z. E. $d.(ax) = adx$, weil $adx + xda = adx + 0 = adx$.

2. Bestünde das Product aus mehr als zwey Factoren: so multiplicire man das Differential eines jeden mit

Digitized by Google

dem Producte der übrigen Factoren. So ist z. E. $d(xyz) = yzdx + xzdy + xydz$. Denn setzt man v statt xy so ist $d(vz) = vdz + zdv$. Nun ist $dv = d(xy) = xdy + ydx$. Folglich ist $d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$.

§. 10.

Aufgabe. Das Differential eines Quotienten oder Bruchs zu finden.

Man multiplicire den Nenner mit dem Differential des Zählers, und den Zähler mit dem Differential des Nenners, subtrahire beyde Producte, und dividire die Differenz mit dem Quadrate des Nenners. Z. E. $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Denn nach gehöriger Substitution hat man $\frac{x + dx}{y + dy}$, und hievon die gegebene Function subtrahiert, $\frac{x+dx}{y+dy} - \frac{x}{y}$, und zu einerley Benennung gebracht, $\frac{xy + ydx - xy - xdy}{y^2 + ydy} = \frac{ydx - xdy}{y^2 + ydy}$, wo ydy gegen y^2 verschwindet. Demnach ist §. 6. $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Zusatz. 1. Wäre Zähler oder Nenner des Bruchs eine beständige Größe, so fällt das Glied, worinn ihr Differential vorkommt, aus. Z. E. $d\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{xda - adx}{x^2} = \frac{o - adx}{x^2} = \frac{-adx}{x^2}$. Und $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{adx - xda}{a^2} = \frac{adx - o}{a^2} = \frac{adx}{a^2}$.

2. Ist

8. Ist Zähler oder Nenner eine zusammengesetzte Größe: so verbinde man die vorhergehenden Regeln. So ist z. E. $d\left(\frac{x+y}{z}\right) = \frac{z\,d(x+y) - (x+y)\,dz}{z^2}$ $= \frac{zdx + zdy - xdz - ydz}{z^2}$; und $d\left(\frac{x}{y+z}\right) = \frac{(y+z)\,dx - xd(y+z)}{(y+z)^2} = \frac{ydx + zdx - xdy - xdz}{y^2 + 2yz + z^2}$; und $d\left(\frac{xy}{x-y}\right) = \frac{(x-y)\,d(xy) - xy.\,d(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)(xdy + ydx) - xy(dx - dy)}{x^2 - 2xy + y^2}$.

§. 11.

Aufgabe. Das Differential einer Potenz zu finden.

Mit dem Exponenten der veränderlichen Größe multiplicire man die um einen Grad verminderte Potenz der veränderlichen Größe, und dies Product noch mit dem Differential derselben. Z. E. $d(x^m) = mx^{m-1}dx$.

Denn setzt man $x + dx$ anstatt x, so ist II. §. 40. $(x+dx)^m = x^m + mx^{m-1}dx + \frac{m.\,m-1}{1.\,2.}x^{m-2}dx^2 \ldots$. Subtrahirt man hievon die gegebene Function, so ist der Rest $mx^{m-1}dx + \frac{m.\,m-1}{1.\,2.}x^{m-2}dx^2 \ldots$, worinn das zweyte Glied und alle folgende verschwinden. Demnach ist §. 6. $d(x^m) = mx^{m-1}dx$.

Zusatz. 1. Wurzelgrößen kann man mit einem gebrochnen Exponenten ansetzen, und alsdenn nach Art der Potenzen differentiiren. Z. E. $d(\sqrt[m]{x}) = d(x^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}dx = \frac{1}{m}x^{\frac{1-m}{m}}dx = \frac{1}{m}\sqrt[m]{x^{1-m}}\,dx$.

2. Kom-

Digitized by Google

2. Kommen Potenzen oder Wurzelgrößen im Nenner eines Bruchs vor: so werden ihre Exponenten negativ angesetzt. So ist z. E. $d\left(\frac{a}{x^m}\right) = d(ax^{-m}) = -max^{m-1}dx = \frac{-madx}{x^{m+1}}$; und $d\left(\frac{a}{\sqrt[n]{x^m}}\right) = d(ax^{-\frac{m}{n}}) = -\frac{m}{n}ax^{-\frac{m}{n}-1}dx = -\frac{m}{n}ax^{\frac{-m-n}{n}}dx = \frac{-madx}{n\sqrt{x^{m+n}}}$.

Auf eben die Art ist auch §. 10. $d\left(\frac{x}{y}\right) = d(xy^{-1})$.

3. Ist die gegebene Function irgend eine Potenz eines zusammengesetzten Ausdrucks: so läßt sich leicht ihr Differential nach der Analogie finden. So ist z. E. $d\left((a+bx+cx^2)^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}.a+bx+cx^2)^{\frac{m-n}{n}}$. $d(a+bx+cx^2) = \frac{m}{n}\sqrt[n]{a+bx+cx^2}^{m-n}.(bdx+2cxdx)$.

§. 12.

Aufgabe. Jede höhere Differentiale zu finden.

Da §. 5. Zus. 2. $d^n(x) = d(d^{n-1}x)$ ist: so erhält man jedes höhere Differential, wenn man das nächstvorhergehende als eine gemeine veränderliche Größe ansieht, und nach den bisherigen Regeln ihr Differential sucht; wozu also das nächstvorhergehende Differential gegeben, oder durch alle vorhergehende Stuffen vorher aufgesucht werden muß.

Sollte z. E. von der Function $x+a-y$ das Differential der zweyten Ordnung, oder das zweyte Differential, gefunden werden: so ist $d(x+a-y) = dx-dy$; folglich

$= -\frac{dy}{x}$

folglich $d^2(x+a-y) = d(dx-dy) = d^2x - d^2y$. Demnach wäre das dritte Differential eben dieser Function $d(d^2x - d^2y) = d^3x - d^3y$; und so auch die folgenden Differentiale.

Von der Function xy ist das erste Differential, $d(xy) = xdy + ydx$, folglich das zweyte, $d(xdy + ydx) = xd^2y + dydx + yd^2x + dxdy = xd^2y + yd^2x + 2dxdy$.

Von der Function x^m ist das erste Differential, $d(x^m) = mx^{m-1}dx$, folglich das zweyte, $d(mx^{m-1}dx) = mx^{m-1}d^2x + (m-1)mx^{m-2}dx^2$.

Von der Function $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ ist das erste Differential, $d(xy^{-1}) = -xy^{-2}dy + y^{-1}dx$, folglich das zweyte, $d(y^{-1}dx - xy^{-2}dy) = y^{-1}d^2x - y^{-2}dxdy - y^{-2}dxdy + 2y^{-3}xdy^2 - xy^{-2}d^2y = \frac{d^2x}{y} - \frac{2dxdy}{y^2} + \frac{2xdy^2}{y^3} - \frac{xd^2y}{y^2} = \frac{y^2d^2x - 2ydxdy + 2xdy^2 - xyd^2y}{y^3}$.

Zusatz. 1. Hieraus erhellet, wie man jede gegebene Function, worinn Differentialgrößen vorhanden sind, sie mag nun aus einer genauen Differentiirung entstanden seyn, oder nicht, differentiiren müsse. Und dies ist der gewöhnliche Fall bey Aufsuchung höherer Differentiale; wofür die beyden folgenden Aufgaben.

2. Enthält die gegebene Function, welche man differentiiren soll, Differentiale zweyer veränderlichen Größen x, y, dergleichen die Abscissen und Ordinaten sind: so wird gemeiniglich das eine, gewöhnlich dx, als eine beständige Größe angesehen und behandelt, wodurch die Formel für das höhere Differential abgekürzt wird. In den

Digitized by Google

den folgenden Aufgaben, werden stets beyderseitige Differentiale als veränderliche Größen behandelt.

§. 13.

Aufgabe. Jede Function, welche Differentiale der ersten Ordnung enthält, zu differentiiren.

1. $d\left(\frac{ydy}{dx}\right) = d(ydydx^{-1}) = dx^{-1}dy^2 + ydx^{-1}d^2y - ydx^{-2}dxdy = \frac{dy^2}{dx} + \frac{yd^2y}{dx} - \frac{ydxdy}{dx^2} = \frac{dxdy^2 + ydxd^2y - ydxdy}{dx^2}$. §. 9. Zus. 2.

2. $d(\sqrt{dx+dy}) = d\left(\overline{dx+dy}^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\overline{dx+dy}^{\frac{1}{2}-1}$. $d(dx+dy) = \frac{1}{2}\overline{dx+dy}^{-\frac{1}{2}}.(d^2x+d^2y) = \frac{d^2x+d^2y}{2\sqrt{(dx+dy)}}$. §. 11. Zus. 1.

3. $d\left(\frac{ydy}{\sqrt{(dx+dy)}}\right) = \frac{\sqrt{dx+dy}\,(yd^2y+dy^2) - ydy.\,d\left(\overline{dx+dy}^{\frac{1}{2}}\right)}{dx+dy}$. §. 10.

§. 14.

Aufgabe. Jede Function, welche Differentiale der zweyten Ordnung enhält, zu differentiiren.

1. $d(dxdy) = dxd^2y + dyd^2x$. §. 9.

2. $d\left(\frac{dx^2}{dy}\right) = \frac{2dydxd^2x - dx^2d^2y}{dy^2}$ §. 10.

Anmerkung. Diese beyden Beyspiele zeigen, wie Differentiale auch von einer Ordnung gemacht werden, welche die zweyte übersteigt. Dergleichen aber kommen selten vor; daher man sich auf die zweyte Differentiirung, welche von häufigerem Gebrauch ist, füglich einschränken kann.

III. Dif-

Digitized by Google

II. Differentiirung der Exponentialgrößen.

§. 15.

Ist eine Größe zu einer Potenz von veränderlichen Exponenten erhoben: so heißt diese Potenz eine **Exponentialgröße**, quantitas exponentialis. Nun soll entweder solcher Exponent, oder solche Potenz selbst differentiirt werden. Im ersten Falle entstehen die **logarithmischen Differentiale**, weil der Exponent der Logarithmus der Potenz ist; im zweyten Falle ist bey solcher Potenz entweder der Exponent allein, oder so wohl die Größe selbst, als auch ihr Exponent, veränderlich.

Es sey z. E. $a^x = y$, oder $z^x = y$. Nun lehrt die **Exponentialrechnung**, nicht nur dx, das ist, $d(\log. y)$, wo y entweder eine einfache oder eine zusammengesetzte Größe seyn kann; sondern auch dy, das ist, entweder $d(a^x)$, oder $d(z^x)$ finden.

§. 16.

Aufgabe. Die Logistik, oder logarithmische Linie, worinn die Abscissen die Logarithmen der zugehörigen Ordinaten sind, zu beschreiben. Fig. 215.

Eine gerade Linie AH, theile man in beliebig gleiche Theile in A, B, C, D u. s. w. In einem dieser Punkte, etwa D, errichte man den Perpendikel DM so lang man will, und ziehe mit ihm durch die folgenden Punkte E, F, G, H, u. s. w. Parallelen. Hierauf ziehe man AMN, welche die ersten Parallele in N trifft; alsdenn BNO, welche die zweyte Parallele in O trifft; alsdenn COP, welche die dritte Parallele in P trifft; alsdenn DPQ, welche die vierte Parallele in Q trifft, und so immer fort. Eine krumme Linie, welche durch die auf vorgemeldete

meldete Art gefundnen Punkte M N O P Q etc. gehet, ist die gesuchte logarithmische Linie.

Denn nach der Verzeichnung ist DM : EN = AD : AE, und EN : FO = BE : BF, auch ist AD = BE, AE = BF, und daher AD : AE = BE : BF. Folglich ist auch DM : EN = EN : FO, das ist, DM, EN, FO, sind in stetiger geometrischer Proportion. Auf eben die Art beweißt man solches auch von allen folgenden Ordinaten. Nun sind die ihnen zugehörigen Abscissen AD, AE, AF, AG, AH u. s. w. nach der Verzeichnung in stetiger arithmetischer Progreßion. Folglich sind diese die Logarithmen von jenen.

Zusatz. 1. Sind die angenommenen gleichen Theile auf AH unendlich klein: so sind auch die Theile der Curve zwischen den gefundnen Punkten unendlich klein; alsdenn sind die Linien AM, BN, CO, DP u. s. w. die Tangenten der Logistik in den gefundnen Punkten, und daher AD, BE, CF, DG, u. s. w. die zugehörigen Subtangenten VI. §. 21. Auch ist in dieser Voraussetzung jeder der gleichen Theile, wie GH oder PZ, das Differential der Abscisse, dx, und ZQ das Differential der zugehörigen Ordinate, dy.

2. Da nach der Verzeichnung AD = BE = CF = DG u. s. w. so ist die Subtangente der Logistik eine beständige Größe, welche daher auch die Basis eines logarithmischen Systems heißt, und durch a soll bezeichnet werden.

§. 17.

Aufgabe. Eine Function für die logarithmische Linie zu finden. Fig. 215.

Da

Digitized by Google

Da $\triangle QPZ \sim \triangle PDG$: so ist $QZ : PZ = PG : DG$, das ist, $dy : dx = y : a$. Folglich ist $ady = ydx$, folglich $\frac{ady}{y} = dx$, die Function für die Logistik.

§. 18.

Aufgabe. Die logarithmischen Differentiale zu finden.

Man dividire das Differential der Größe, deren Logarithmus zu differentiiren ist, mit der Größe selbst: so ist der Quotient das gesuchte logarithmische Differential.

Es sey $a^x = y$: so ist $x = \log. y$, folglich §. 17. $dx = d(\log. y) = \frac{ady}{y}$. Setzt man hierinn $a = 1$: so ist $d(\log. y) = \frac{dy}{y}$; welche Regel auch für alle zusammengesetzte Fälle hinreichend ist. Denn

1. Es sey $x = \log. y^m$, so ist $dx = \frac{my^{m-1}dy}{y^m} = my^{-1}dy = \frac{mdy}{y} = m.\frac{dy}{y}$.

2. Es sey $x = \log.(1 + y^2)$, so ist $dx = \frac{2ydy}{1+y^2}$.

3. Es sey $x = \log.\left(\frac{y}{\sqrt{(1+y^2)}}\right)$, oder $x = \log. y - \log(1+y^2)^{\frac{1}{2}} = \log. y - \frac{1}{2}\log.(1+y^2)$, so ist $dx = \frac{dy}{y} - \frac{ydy}{1+y^2}$ und, auf einerley Benennung gebracht, $dx = \frac{dy + y^2dy - y^2dy}{y(1+y^2)} = \frac{dy}{y(1+y^2)}$.

4. Es sey $x = \log.(\overline{a+y}.\ \overline{b+y}.\ \overline{c+y})$ oder $x = \log.(a+y) + \log.(b+y) + \log.(c+y)$, so ist $dx = \frac{dy}{a+y} + \frac{dy}{b+y} + \frac{dy}{c+y}$.

Digitized by Google

5. Es sey $x = \log. r\frac{a+y}{a-y}$, oder $x = \log. \left(\frac{a+y}{a-y}\right)^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}\log.(a+y) - \frac{1}{2}\log.(a-y)$, so ist $dx = \frac{\frac{1}{2}dy}{a+y} + \frac{\frac{1}{2}dy}{a-y} = \frac{\frac{1}{2}ady - \frac{1}{2}ydy + \frac{1}{2}ady + \frac{1}{2}ydy}{a^2-y^2}$ $= \frac{ady}{a^2-y^2}$.

6. Es sey $x = (\log. y)^2$. Man setze $\log. y = p$ oder $(\log. y)^2 = p^2$, so ist $d(\log. y)^2 = 2pdp = 2\log. y \times d(\log. y) = 2\log. y. \frac{dy}{y}$; welches mit der allgemeinen Regel §. 11. völlig übereinstimmt, nach welcher $d(\log. y)^2 = 2\log. y. d(\log. y) = 2\log. y. \frac{dy}{y}$. Demnach ist überhaupt $d(\log. y)^n = n(\log. y)^{n-1}. \frac{dy}{y}$.

§. 19.

Aufgabe. Das Differential der veränderlichen Potenz einer beständigen Größe zu finden.

Es sey $y = a^x$, so ist das Differential dieser Function ein Product aus drey Factoren, wovon der erste die Function selbst, a^x, der zweyte das Differential des veränderlichen Exponenten, dx, und der dritte der Logarithmus der beständigen Größe, $\log. a$, ist; oder $d(a^x) = a^x dx \log. a$.

Denn da $y = a^x$, so ist $\log. y = x \log. a$. Nun ist $d(\log. y) = \frac{dy}{y}$ und $d(x \log. a) = dx \log. a$. Folglich ist $\frac{dy}{y} = dx \log. a$, folglich $dy = d(a^x) = ydx \log. a = a^x dx \log. a$.

§. 20.

Digitized by Google

§. 20.

Aufgabe. Das Differential der veränderlichen Potenz einer veränderlichen Größe zu finden.

Es sey $y = z^x$, so ist das Differential dieser Function die Summe zweyer Differentiale solcher Function, welche man findet, wenn man einmal die veränderliche Größe z, das andremal ihren veränderlichen Exponenten, als eine beständige Größe behandelt; oder $d(z^x) = z^x dx \log. z + xz^{x-1} dz$.

Denn da $y = z^x$, so ist $\log. y = x \log. z$, folglich $\frac{dy}{y} = dx \log. z + x\frac{dz}{z}$, folglich $dy = ydx \log. z + yx\frac{dz}{z}$. Setzt man in diese Gleichung den Werth $y = z^x$, so erhält man $dy = d(z^x) = z^x dx \log. z + xz^{x-1} dz$.

IV. Gebrauch der Differentiale.

§. 21.

Aufgabe. Allgemeine Formeln für gerade Linien, die zur Theorie der Curve gehören, zu finden. Fig. 316.

Es sey AMS eine Curve, deren Axe AN, und durch einen beliebigen Punkt der Curve M die Mr der AN parallel, auch $Pp = Mr = dx$; so ist $rm = dy$, und TM die Tangente für M, und daher PT die Subtangente. Nun sey MN senkrecht auf TM: so ist MN die Normale, PN die Subnormale. VI. §. 21.

Bey rechtwinklichten Coordinaten ist $\Delta Mmr \sim \Delta TMP \sim \Delta PMN$, folglich

1. $mr : Mr = MP : PT$, das ist, $dy : dx = y : PT$, folglich die Subtangente $PT = \frac{ydx}{dy}$.

2. $TP : PM = PM : PN$, das ist, $\frac{ydx}{dy} : y = y : PN$, folglich die Subnormale $PN = \frac{ydy}{dx}$.

3. $TM^q = TP^q + PM^q$, das ist, $TM^q = \frac{y^2dx^2}{dy^2} + y^2$ $= \frac{y^2dx^2 + y^2dy^2}{dy^2} = \frac{y^2}{dy^2}(dx^2 + dy^2)$ folglich die Tangente $TM = \frac{y}{dy}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

4. $MN^q = PN^q + PM^q$, das ist, $MN^q = \frac{y^2dy^2}{dx^2} + y^2$ $= \frac{y^2dy^2 + y^2dx^2}{dx^2} = \frac{y^2}{dx^2}(dy^2 + dx^2)$, folglich die Normale $MN = \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

§. 22.

Aufgabe. Es ist die Gleichung für eine Curve bey rechtwinklichten Coordinaten gegeben; man soll die zu ihrer Theorie gehörigen geraden Linien bestimmen.

Man differentiire die gegebene Gleichung, bestimme den Werth der Differentiale durch die in der Gleichung enthaltnen Größen, und setze solchen Werth in die §. 21. gefundnen allgemeinen Formeln, um aus denselben die Differentiale zu eliminiren: so hat man alsdenn die verlangten Linien durch endliche Größen bestimmt.

Es sey z. E. die Gleichung für die Parabel, $y^2 = px$, gegeben: so ist $2ydy = pdx$, folglich $dy = \frac{pdx}{2y}$, und $dx =$

Digitized by Google

$dx = \frac{2ydy}{p}$, folglich $dy^2 = \frac{p^2dx^2}{4y^2}$, und $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$. Nun ist §. 21.

1. Die Formel für die Subtangente $\frac{ydx}{dy}$. Setzt man für dx den gefundnen Werth, so ist die Subtangente der Parabel $= \frac{y}{dy} \cdot \frac{2ydy}{p} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$.

2. Die Formel für die Tangente $\frac{y}{dy} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Folglich ist das Quadrat der Tangente $\frac{y^2dx^2}{dy^2} + y^2$, oder wenn man für dx^2 den gefundenen Werth setzt, $\frac{y^2}{dy^2} \cdot \frac{4y^2dy^2}{p^2} + y^2 = \frac{4y^4}{p^2} + y^2$. Nun ist $y^2 = px$ und daher $y^4 = p^2x^2$. Folglich ist das Quadrat der Tangente $= \frac{4p^2x^2}{p^2} + px = 4x^2 + px$, folglich die Tangente der Parabel $= \sqrt{(4x^2 + px)}$.

3. Die Formel für die Subnormale $\frac{ydy}{dx}$, aber, wenn man für dx den gefundnen Werth setzt, $ydy : \frac{2ydy}{p} = \frac{ydy \cdot p}{2ydy} = \frac{1}{2}p$.

4. Die Formel für die Normale $\frac{y}{dx} \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Folglich ist das Quadrat der Normale $\frac{y^2}{dx^2}(dx^2 + dy^2)$, das ist, $y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2}$, oder wenn man für dx^2 den gefundnen Werth setzt, $y^2 + y^2dy^2 : \frac{4y^2dy^2}{p^2}$, das ist,

Digitized by Google

$y^2 + \frac{p^2y^2dy^2}{4y^2dy^2} = y^2 + \frac{1}{4}p^2 = px + \frac{1}{4}p^2$. Folglich ist die Normale der Parabel $= r(px + \frac{1}{4}p^2)$.

§. 23.

Aufgabe. Allgemeine Formeln für den Winkel zu finden, welchen die Curve oder ihre Tangente mit der Ordinate sowohl, als mit der Axe der Abscissen in jedem ihrer Punkte macht. Fig. 216.

In dem rechtwinklichten Triangel Mmr ist für dem Halbmesser $= 1$, $rm : rM = 1 :$ tang rmM, folglich tang $rmM = \frac{rM}{rm} = \frac{dx}{dy}$; und $Mr : rm = 1 :$ tang rmM, folglich tang $rMm = \frac{rm}{Mr} = \frac{dy}{dx}$.

Setzt man nun die Tangente des Winkels, welchen die Curve oder ihre Tangente mit der Ordinate macht, oder tang $rmM = m$; und die Tangente des Winkels welchen die Curve oder ihre Tangente mit der Axe der Abscissen macht, oder tang $rMm = n$: so hat man die allgemeinen Formeln $m = \frac{dx}{dy}$, und $n = \frac{dy}{dx}$.

Zusatz. Setzt man für m oder n die Tangente irgend eines bestimmten Winkels: so hat man eine Gleichung in welcher man den Werth von $\frac{dx}{dy}$ oder $\frac{dy}{dx}$ aus der Function einer gegebenen Curve bestimmt, und man erhält alsdenn einen Werth für x, welcher anzeigt, ob und wo der angenommene Winkel bey solcher Curve statt findet. Z. E. man hätte für eine Hyperbel die Gleichung $y^2 = 2ax + 2x^2$, und man wolte wissen, in welchem Punkte diese Hyperbel mit der Ordinate einen Winkel von 45° Grad machte: so ist hier $m = 1$, folglich

$1 =$

Digitized by Google

$n = \frac{dx}{dy}$. Differentiirt man nun die gegebene Gleichung, so erhält man $2ydy = 2adx + 4xdx = (2a + 4x)\,dx$, folglich $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2a+4x} = \frac{y}{a+2x}$. Demnach hat man $t = \frac{y}{a+2x}$, folglich $a + 2x = y$. Nun ist nach der gegebenen Gleichung $y = \sqrt{(2ax + 2x^2)}$. Folglich ist $a + 2x = \sqrt{(2ax + 2x^2)}$, und quadrirt $a^2 + 4ax + 4x^2 = 2ax + 2x^2$, folglich $a^2 + 2ax + 2x^2 = 0$, oder $x^2 + ax + \frac{1}{2}a^2 = 0$, folglich $x = -\frac{1}{2}a \mp \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2)} = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{-\frac{1}{4}a^2}$. Da dieser Werth für x unmöglich ist: so siehet man, daß die gegebene Hyperbel mit der Ordinate nirgends einen Winkel von 45 Grad mache.

§. 24.

Aufgabe. Den Punkt zu finden, wo die Tangente einer Curve der Ordinate, oder der Axe der Abscissen parallel läuft. Fig. 205.

Da in diesem Falle die Winkel §. 23. Null sind: so setze man in den allgemeinen Formeln diese Winkel m und $n = 0$, bestimme $\frac{dx}{dy}$ aus der gegebenen Function, und setze im ersten Falle den Zähler, im zweyten den Nenner $= 0$.

Gesetzt man hätte für eine Curve die Gleichung $y^2 + x^2 = 3ax - 2a^2 + 2by - b^2$, (welche bey rechtwinklichten Coordinaten erhalten wird, wenn man VI. §. 24. den Durchmesser des Cirkels a nennt, den Anfang der Abscissen in A setzt, die Gleichung $y^2 = ax \div x^2$ formirt, und VI. §. 24. Zus. 3. den Anfang der Abscissen in E Fig. 205. annimmt, so daß $AF = a$, $EF = b$ ist): so ist ihr Differential $2ydy + 2xdx = 3adx + 2bdy$,

folglich $(2y - 2b)\,dy = (3a - 2x)\,dx$, folglich $\frac{2y-2b}{3a-2x} = \frac{dx}{dy}$.

Soll nun die Tangente der Ordinate parallel werden: so setze man den Zähler des gefundnen Bruchs $2y - 2b = 0$, folglich $y = b$. Setzt man diesen Werth anstatt y in die gegebene Gleichung: so erhält man $b^2 + x^2 = 3ax - 2a^2 + 2b^2 - b^2$, das ist, $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$, folglich $x = \frac{3}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^2}$, das ist, x entweder $= 2a$ oder $= a$. Dieser gefundne doppelte Werth für x lehret demnach, daß die Curve oder ihre Tangente der Ordinate parallel wird in den zwey Punkten A und B, welche zur Ordinate b, das ist, cA, KB, und zu den Abscissen a oder 2a, das ist Ec, oder EK haben, (wobey man sich in der Figur AF so groß als AB gedenken muß, weil $AF = a = AB$ in der Gleichung angenommen ist).

Soll nun die Curve, oder ihre Tangente der Axe der Abscissen parallel werden, das ist, will man die Punkte wissen, wo solches geschiehet: so setze man den Nenner des gefundnen Bruches $3a - 2x = 0$, folglich $x = \frac{3}{2}a$, und bringe diesen Werth anstatt x in die gegebene Gleichung: so erhält man $y^2 + \frac{9}{4}a^2 = \frac{9}{2}a^2 - 2a^2 + 2by - b^2$, das ist $y^2 - 2by + b^2 = \frac{1}{4}a^2$, folglich $y - b = \mp \frac{1}{2}a$, folglich $y = b \mp \frac{1}{2}a$. Demnach wird die Curve oder ihre Tangente der Axe der Abscissen parallel in den zwey Punkten e und d, welche zur Abscisse $\frac{3}{2}a$, das ist, Ea, und zu Ordinaten $b + \frac{1}{2}a$ und $b - \frac{1}{2}a$, das ist, ae und ad haben.

Zusatz. 1. Die durch beyde Operationen gefundnen Punkte c, M, d, e, nennt man die Grenzen der Abscissen und Ordinaten; weil jeder Abscisse zwischen c und M eine Ordinate zugehörig ist, außerdem aber nicht, indem, so bald man x entweder $a - q$ oder

$2a +$

Digitized by Google

$2a + q$ ansetzt, die Ordinaten unmöglich werden; und weil keine Ordinate größer als ae, und kleiner als ad werden kann, indem, so bald man y entweder $b + \frac{1}{2}a + q$ oder $b - \frac{1}{2}a - q$ ansetzt, der Werth von x unmöglich wird. Demnach ist Ec die kleinste und EK die größte unter den Abscissen die wirkliche Ordinaten geben; ae die größte unter den Ordinaten, welche den concaven Theil, und ad die kleinste unter denen, welchen den converen Theil der Peripherie treffen, auch sind die Ordinaten cA, KB, zugleich die kleinsten für den concaven, und die größten für den converen Theil.

2. Hieraus erhellet, daß diese Methode nicht nur lehret, wo die Tangente der Ordinaten oder den Abscissen parallel wird, sondern auch zugleich die Grenzen der Abscissen und Ordinaten, und welche darunter die größten und kleinsten sind, bestimmt.

§. 25.

Aufgabe. Unter mehrern Größen, welche nach einem bestimmten Gesetze wachsen und abnehmen, soll man die größte und kleinste finden.

Da jede Function, welche Art von Größe sie auch angehen mag, als die Function der Ordinate einer krummen Linie, welche in einem Falle größer oder kleiner wird, als in jedem andern, wo man sagt, daß sie ein Größtes oder ein Kleinstes zulasse, angesehen werden kann: so ist offenbar, daß man nach der im vorhergehenden §. 24. entwickelten Methode das Größte und Kleinste für jede durch eine Function bestimmte Größe finden könne.

Z. E. Man soll eine gegebene Zahl a in zwey Theile dergestalt theilen, daß solche das möglich größte Product geben. Nennt man den einen Theil x, und den andern

$a - x$, so ist ihr Product $ax - x^2 = y$, folglich $adx - 2xdx = dy$, folglich $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a - 2x}$. Da man hier den Zähler nicht $= 0$ setzen kann: so setze man den Nenner $a - 2x = 0$, folglich $a = 2x$, und $\frac{1}{2}a = x$. Demnach erhält man das größte Product, wenn man die gegebene Zahl in zwey gleiche Theile theilt.

Zusatz. Bey einem solchem Ausdruck, dergleichen im vorhergehenden Beyspiels $ax - x^2$ war, hat man nicht einmal nöthig, ihn erst einer veränderlichen Größe y gleich zu setzen, sondern braucht ihn nur gleich zu differentiiren, und seine Differential, oder, wenn solches ein Bruch, seinen Zähler oder seinen Nenner $= 0$ zu setzen, als $adx - 2xdx = 0$, folglich $\frac{1}{2}a = x$, wie vorher.

Z. E. Man soll eine gegebene Zahl a so theilen, daß eine Potenz des einen Theils, x^m, mit einer Potenz des andern Theils $(a - x)^n$ multiplicirt, das möglich größte Product $x^m (a - x)^n$ gebe. Demnach wäre $mx^{m-1}dx. (a - x)^n - nx^m (a - x)^{n-1}dx = 0$, folglich, wenn man mit $x^{m-1}dx (a - x)^{n-1}$ dividirt, $m(a - x) - nx = 0$, oder $ma - mx - nx = 0$, folglich $\frac{ma}{m + n} = x$. Gesetzt es sey $m = 2$, $n = 3$, so ist $x = \frac{2}{5}a$ der eine Theil, und daher $\frac{3}{5}a$ der andre.

§. 26.

Aufgabe. Eine Größe läßt ein Größtes, oder ein Kleinstes, oder beydes zu; man soll bestimmen, in welchem von diesen drey Fällen sich die Größe befinde.

In Fig. 205. siehet man, daß eine Größe auf zweyerley Art ein Größtes oder ein Kleinstes werden kann. Denn die Ordinate bM wächst bis sie die größte ae wird, und

und nimmt von da an wieder ab; die Ordinate Hf wächst bis sie die größte KB wird, wo sie plötzlich stille stehet. Die Ordinate bg nimmt ab, bis sie die kleinste ad wird, und wächst von da an wieder; die Ordinate Hm nimmt ab, bis sie die kleinste KB wird, wo sie plötzlich stille stehet. Demnach ist KB bey solchem Stillstande zugleich ein Größtes für den convexen und ein Kleinstes für den concaven Theil der Peripherie.

Um daher obgedachte drey Fälle zu unterscheiden, hat man nur nöthig, wenn a den Werth von x im Fall des Größten oder Kleinsten anzeigt, in der gegebenen Function anstatt x das einemal $a + q$, das andremal $a - q$ zu setzen. Findet sich alsdenn der beyderseitige Werth reel und kleiner, oder größer als der Werth von $x = a$, so hat man im ersten Falle ein Größtes, im zweyten ein Kleinstes. Findet es sich aber, daß von dem beyderseitigen Werthe der eine reel, der andre nur eingebildet ist: so hat man ein Größtes und ein Kleinstes zugleich.

Anmerkung. Was bisher abgehandelt worden, mag hinreichend seyn, von dem Gebrauche der Differentiale, der sich noch viel weiter erstreckt, und überhaupt von der Differentialrechnung, die ersten Begriffe zu geben.

Zwey-

Digitized by Google

Zweytes Capitel.

Von der Integralrechnung.

I. Natur der Integrale.

§. 87.

Integriren, oder das Integral finden, heißt eine eine endliche Größe aus ihrem Differential ableiten, das ist, alle Differentiale, welche eine endliche Größe, bey ihrem Uebergange in einen gewissen Zustand, durchlaufen ist, summiren; daher auch der Buchstabe $\int$ das Zeichen des Integrals ist.

So heißt z. E. $\int dx = x$ die Summe aller dx, welche die Größe x ausmachen; oder das Integral von dx ist x, diejenige Größe, aus deren Differentiirung die gegebene zu integrirende Function dx geworden ist. Daher ist es ein sicheres Merkmal, daß man richtig integrirt habe, wenn man das gefundne Integral differentiirt, und man hieraus das gegebene Differential wieder erhält. So ist z. E. $\int (xdy + ydx) = xy$, indem $d(xy) = xdy + ydx$, dem gegebenen Differential.

Zusatz. Das Zeichen des Integrals gehet nicht auf die nächstfolgende Größe allein, sondern auf den ganzen folgenden Ausdruck, wenn solcher ein Product oder Quotient ist; da man denselben nur alsdenn in eine Parenthese einschließt, wenn er eine Summe oder Differenz, oder ein zusammengesetzter Factor ist. So zeigt z. E. $\int xdx\sqrt[4]{(a - x)}$ das Integral des ganzen Products, so wie $\int (xydz + xzdy + yzdx)$ das Integral der ganzen Sum-

Digitized by Google

Summe, deren einzelne Glieder Producte veränderlicher Größen sind; oder ∫ (adx + bdy + cdz) die Integrale der einzelnen Glieder, welche nur einzelne veränderliche Größen enthalten. Im letztern Fall ist solches nur eine Abkürzung, da es eigentlich ∫adx + ∫bdy + ∫cdz heißen müßte. Die erste Bezeichnungsart macht es nothwendig, wenn man das Product zweyer Integrale andeuten will, daß solches durch das Multiplicationszeichen geschehe. Z. E. ∫Pdx. ∫Qdx, nicht aber ∫Pdx∫Qdx.

Anmerkung. Da alle Größen durch Wachsen und Abnehmen aus einem Zustande in den andern treten können; solches aber nicht auf einmal und sprungweise, sonnach dem Gesetze der Stetigkeit so geschiehet, daß sie vom Anfange bis zu Ende alle Zwischenzustände betreten, und §. 5. Zus. 5. von einem nächstfolgenden Zustande zum andern nächstfolgenden Zustande und so fort gelangen: so muß von diesem Uebergange, den man durch die Differentiale ausdrückt, und der bey jeder Größe eigenen Gesetzen unterworfen ist, ihr nachfolgender Zustand, und daher die Natur der Größe selbst abhangen. Demnach läßt sich aus der Art und Weise, wie eine Größe aus einem Zustande in den andern gelangt, rückwärts ein Schluß auf die Größe selbst machen; und dieser Schluß wird gemacht, wenn man aus dem Differential das Integral findet.

§. 28.

Die Differentialfunction, welche integrirt werden soll, und auf deren Beschaffenheit sich natürlicher Weise die Art der Operation beym Integriren gründen muß, ist entweder vollständig, oder unvollständig; entweder ganz oder gebrochen; entweder rational oder irrational; entweder monomisch, oder nicht monomisch; entweder von gemeinen Größen, oder

von

Digitized by Google

von Exponentialgrößen; entweder von einer oder von mehrern veränderlichen Größen.

1. **Vollständig** ist sie, wenn sie so ist, wie sie aus einer wirklichen Differentiirung entstanden; **unvollständig**, wenn der Ausdruck nicht das ganze Differential darstellt. So ist z. E. $xdy + ydx$, oder das Differential von xy; wie auch $\frac{xdy - ydx}{y^2}$, oder das Differential von $\frac{x}{y}$, vollständig; hingegen xdy, oder $xdy - ydx$ unvollständig.

2. **Gebrochen** oder **ganz** ist sie, je nachdem die veränderliche Größe auch im Nenner eines Bruchs vorkommt, oder nicht. Z. E. $\frac{cx^m dx}{a^2 - b^2}$ ist ganz, hingegen $\frac{cx^m dx}{(a^2 - b^2)x^n}$ und $\frac{cx^m dx}{a^2 - x^2}$ ist gebrochen, und zwar entweder so, daß die veränderliche Größe im Nenner als Factor, oder nicht als Factor vorkommt.

3. **Rational** oder **irrational**, je nachdem sich in ihr ein ganzer oder gebrochner Exponent befindet, welcher auf die veränderliche Größe gehet. So ist z. E. $bdx(a^2 + bx)^{-2}$ rational, hingegen $xdx(a - x)^{\frac{5}{4}}$ irrational.

4. Ist in der Function irgend eine Potenz einer zweytheiligen oder mehrtheiligen Größe, worunter die veränderliche Größe mit befindlich: so heißt die Function **binomisch**, oder **multinomisch**; sonst aber **monomisch**. So ist z. E. $3xdx(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ binomisch, hingegen $\frac{cx^m dx}{(a^2 - b^2)x^n}$ monomisch.

5. Ist

5. Ist in der Function ein veränderlicher Exponent, als $a^x dx$, oder ist sie auch nur das Differential eines veränderlichen Exponenten, als $\frac{dy}{y}$, welches man erkennet, wenn der Zähler des Bruchs das genaue Differential der veränderlichen Größe im Nenner enthält: so ist sie eine Function für Exponentialgrößen; sonst aber wie in allen vorhergehenden Beyspielen für gemeine Größen, die nicht zu den Exponentialgrößen gehören.

6. Endlich enthält xdx nur eine, aber xdy, zwey veränderliche Größen.

Zusatz. Hieraus erhellet, daß nach Verschiedenheit der vorgelegten Differential-Function auch das Geschäfte des Integrirens verschieden seyn müsse; und bey der einen genauer und leichter, bey der andern nicht so genau oder doch mißlicher von statten gehen werde.

Anmerkung. Auch gehört noch hieher der Unterschied, daß das gegebene Differential entweder von der ersten oder von einer höhern Ordnung; entweder eine Differential-Größe, oder eine Differential-Gleichung ist.

§. 29.

Das Integriren einer gegebenen Differentialfunction geschiehet entweder mittelbar, erst nach vorhergegangener Vorbereitung und Transformation der vorgelegten Function, oder unmittelbar ohne solche Vorbereitung; entweder genau, oder nur durch Approximation; entweder mit Hülfe der Logarithmen, der Binomialformel, der unendlichen Reihen, oder ohne solche Hülfe.

Zusatz.

Digitized by Google

Zusatz. Man kann zwar jede gegebene Function differentiiren; aber nicht jede Differentialfunction läßt sich integriren; entweder, weil sie unvollständig, und wohl gar aus keiner wirklichen Differentiirung entstanden ist, oder weil man bisher noch keine Methode ihrer Integration gefunden hat; da es so gar deren viele giebt, bey welchen man nur wenige oder gar keine Hoffnung hat, jemals zu ihrer Integration zu gelangen.

§. 30.

Die Fundamentalregel des Integrirens, welche man jedesmal versuchen muß, ehe man die speciellen Methoden zu Hülfe nimmt, ist der umgekehrte Weg des Differentiirens, wornach man das entgegengesetzte von dem thut, was man beym Differentiiren gethan hat, und wodurch man die differentiirte Größe, bis auf die beym Differentiiren weggefallnen beständigen Größen, welche man durch den Buchstaben C anzeigt, nothwendig wieder erhält.

So ist z. E. offenbar $\int dx = x + C$ und $\int \frac{dy}{y} = \log. y.$

Zusatz. 1. Diese Fundamentalregel läßt sich mit Hülfe einiger Kunstgriffe in sehr vielen Fällen, die oft sehr verwickelt scheinen, mit Erfolg anwenden; reicht aber bey weiten nicht zu allen, auch nicht immer zur Entdeckung der versteckten beständigen Größen hin. In solchen speciellen Fällen muß man denn besondre Methoden kennen und anzuwenden wissen. Ja, da auch oft das Integral nicht genau, oder wohl gar nicht zu finden ist: so muß man aus sichern Kennzeichen zu bestimmen wissen, ob und in wie fern jedesmal ein Integral statt finden

Digitized by Google

finden könne oder nicht, und wie man sich dabey zu verhalten habe.

2. Aus dem also gefundnen Integral lassen sich die endlichen Größen nicht nur nach ihren veränderlichen Theilen ableiten, sondern auch ihre beständigen Theile bestimmen; wovon beym Gebrauch der Integrale das mehrere. Zuvor ist es nicht nöthig auf die beständigen Größen, die sich nur aus den besondern Umständen der Sache ergeben, acht zu haben; oder wenigstens hinreichend, sie nur allgemein durch den Buchstaben C anzudeuten.

Anmerkung. Der weite Umfang der Integralrechnung, und die vielen und großen Schwierigkeiten, womit sie verbunden ist, machen es nothwendig, daß man sich in den ersten Elementen nur auf die allgemeine Methode der Fundamentalregel einschränke, und nur auf einige verwickeltere Fälle ausbreite, welche sich der Fundamentalregel noch auf irgend eine Art unterwerfen lassen; um so mehr da dieses schon hinreichend ist, von dem vortheilhaften Gebrauche, der sich von den Integralen machen läßt, Begriffe zu geben. Auch wird von keinen Differentialgleichungen, sondern nur von Differentialgrößen und zwar nur von der ersten Ordnung im Folgenden die Rede seyn.

II. Integrirung gemeiner Differentiale.

§. 31.

Die Fundamentalregel der Integrirung gemeiner Differentiale erfodert, daß man die gegebene Function einer einzelnen veränderlichen Größe, die keine Exponentialgröße ist, nachdem man in derselben den Exponenten der veränderlichen Größe um Eins erhöhet hat,

Digitized by Google

mit dem Producte des erhöheten Exponenten in das Differential der veränderlichen Größe dividire.

Denn dies ist gerade das entgegengesetzte von dem, was man beym Differentiiren einer veränderlichen Größe gethan hat, wodurch man nothwendig solche Größe selbst wieder erhält, auf eben die Art, wie jede Größe unverändert bleibt, wenn man sie mit einer Zahl multiplicirt, und das daher entstehende Product mit derselben Zahl wieder dividirt.

Z. E. So wie $d(x^m) = mx^{m-1}dx$, so ist auch $\int mx^{m-1}dx = \frac{mx^{m-1+1}dx}{(m-1+1)dx} = \frac{mx^m dx}{m\,dx} = x^m$.

Zusatz. 1. Daß $\int dx = x$, und $\int a dx = ax$ sey, siehet man beym ersten Blick; indeß lassen sich auch dergleichen Fälle nach der Fundamentalregel behandeln. Denn da $dx = x^0 dx$, so ist $\int x^0 dx = \frac{x^{0+1}dx}{(0+1)dx} = \frac{xdx}{dx} = x$.

2. Auch für irrationale Functionen paßt die Regel. Z. E. $\int a\sqrt{x}\,dx = \int ax^{\frac{1}{2}}dx = \frac{ax^{\frac{1}{2}+1}dx}{(\frac{1}{2}+1)dx} = \frac{ax^{\frac{3}{2}}dx}{\frac{3}{2}dx} = \frac{2a\sqrt{x^3}}{3}$.

3. Aus dem Folgenden wird erhellen, daß die Regel noch für mehrere Fälle passe. Nur ein Fall ist stets ausgenommen, wo der Exponent der veränderlichen Größe die negative Einheit ist. Z. E. $ax^{-1}dx$. Denn in solchem Falle ist $\int ax^{-1}dx = \frac{ax^{-1+1}dx}{(-1+1)dx} = \frac{ax^0}{0} = \frac{a}{0} = \infty$. Aus dem Folgenden wird erhellen, daß dergleichen

Digitized by Google

gleichen Function $ax^{-1}dx$ oder $\frac{adx}{x}$ ein logarithmisches Differential, nämlich $d(alx) = d(lx^a)$ sey, und wie man sich dabey zu verhalten habe.

4. Aus eben dem Grunde sind auch die Functionen ausgenommen, worinn obgedachter Exponent selbst eine veränderliche Größe ist, wovon auch im Folgenden das mehrere.

§. 32.

Aufgabe. Ganze Differentialfunctionen, worinn nur eine monomische veränderliche Größe ist, zu integriren.

Für diesen Fall wendet man ohne weitere Umstände die Fundamentalregel §. 31. unmittelbar an; nur darf der Exponent der veränderlichen Größe weder die negative Einheit, noch auch selbst eine veränderliche Größe seyn, §. 31. Zus. 3. 4.

So ist z. E. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$; und $\int \frac{ax^n dx}{c} = \frac{ax^{n+1}}{c(n+1)}$;

und $\int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{nx^{\frac{m+n}{m}}}{m+n}$; und $\int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} = x^3$; und $\int dx \sqrt{x} = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$.

§. 33.

Aufgabe. Gebrochene Differentialfunctionen, worinn nur eine monomische veränderliche Größe ist, zu integriren.

Man bringe zuvor die veränderliche Größe mittelst des negativ gesetzten Exponenten aus dem Nenner in den

Digitized by Google

Zähler, und integrire alsdenn nach der Fundamentalregel.

So ist z. E. $\int \frac{cx^m dx}{(a^2 - b^2) x^n} = \int \frac{cx^{m-n} dx}{a^2 - b^2} = \frac{cx^{m-n+1}}{(a^2 - b^2)(m - n + 1)}$; und $\int \frac{bdx}{ax^{m-n}} = \int \frac{bx^{n-m} dx}{a} = \frac{bx^{n-m+1}}{a(n - m + 1)}$; und $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$; und $\int \frac{dx \sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}} = \int \frac{x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx}{2} = \int \frac{x^{\frac{3}{6}} \cdot x^{-\frac{3}{6}} dx}{2} = \int \frac{x^{-\frac{1}{6}} dx}{2} = \frac{x^{\frac{5}{6}}}{2(\frac{5}{6})} = \frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{10}{6}} = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}$; und überhaupt $\int \frac{dx \sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{x}} = \int x^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} dx = \int x^{\frac{n-m}{mn}} dx = \frac{x^{\frac{n-m}{mn}+1}}{\frac{n-m}{mn}+1} = \frac{mnx^{\frac{n-m+mn}{mn}}}{n - m + mn}$.

Zusatz. Hievon ist der Fall ausgenommen, wenn der Zähler der Function ein genaues Differential des Nenners enthält; denn alsdenn ist sie ein logarithmisches Differential. So ist z. E. $\int \frac{dx}{x} = \log. x$. Der allgemeine Ausdruck für dergleichen Functionen ist $\frac{bmx^{m-1} dx}{c(a + x^m)}$; indem $d(a + x^m) = mx^{m-1} dx$ im Zähler der Function angetroffen wird.

§. 34.

Aufgabe. Zusammengesetzte Differentialfunctionen zu integriren, wenn die Glieder nur einzelne monomische veränderliche Größen enthalten.

In

In diesem Falle wird jedes einzelne Glied für sich nach der Fundamentalregel integrirt. Z. E.

1. $\int(2ax^2dx - bz^{-3}dz + \frac{2}{3}cy^{\frac{2}{3}}dy) = \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}\frac{b}{z^2} + \frac{2}{5}cy^{\frac{5}{3}}$.

2. $\int(ax^mdx - bx^{n-2}dx + cy^{m-n}dy) = \frac{ax^{m+1}}{m+1} - \frac{bx^{n-1}}{n-1} + \frac{cy^{m-n+1}}{m-n+1}$.

3. $\int\frac{ax^mdx - bx^ndx}{(a^2+b^2)x} = \int\frac{ax^{m-1}dx}{a^2+b^2} - \int\frac{bx^{n-1}dx}{a^2+b^2} = \frac{ax^m}{m(a^2+b^2)} - \frac{bx^n}{n(a^2+b^2)}$.

4. $\int\frac{ax^2dx - bdx}{(a-b)x^2} + \int\frac{cy^2dy - ey^{-1}dy}{(a+b)y^2} = \int\left(\frac{adx}{a-b} - \frac{bx^{-2}dx}{a-b} + \frac{cdy}{a+b} - \frac{ey^{-3}dy}{a+b}\right) = \frac{ax}{a-b} + \frac{bx^{-1}}{a-b} + \frac{cy}{a+b} - \frac{ey^{-2}}{2(a+b)} = \frac{ax}{a-b} + \frac{b}{ax-bx} + \frac{cy}{a+b} - \frac{e}{2y^2(a+b)}$.

§. 35.

Aufgabe. Zusammengesetzte Differentialfunctionen zu integriren, wenn die Glieder die Producte verschiedener monomischer veränderlicher Größen enthalten.

I. Man integrire jedes einzelne Glied, als ob die übrigen veränderlichen Größen, in welche das Differential der einen multiplicirt ist, beständige Größen wären. Erhält man aus allen Gliedern einerley Integral: so ist

Digitized by Google

solches das gesuchte. Erhält man hingegen nicht einerley Integral aus allen Gliedern, oder sind nicht so viel Glieder als veränderliche Größen in jedem Gliede: so ist das Differential entweder nicht vollständig, oder läßt sich nach dieser Regel nicht integriren.

So ist z. E. $\int(xdy + ydx) = xy$; und $\int(xy^2dy + y^3dx) = xy^3$; und $\int(x^2y^2z^3dx + x^2yz^3dy + x^3y^2z^2dz) = x^2y^2z^2$. Hingegen $\int xdy$, oder $\int x^2ydx$, ist unvollständig.

II. Oder allgemein: Man nehme diejenigen Glieder, worinn das Differential einer veränderlichen Größe vorkommt, zusammen, und integrire solche, als ob nur diese einzige veränderliche Größe vorhanden wäre. Das also gefundne Integral differentiire man, und subtrahire das Resultat von der gegebenen Function. Bleibt alsdenn kein Rest: so hat man das gesuchte Integral gefunden; bleibt aber ein Rest: so verfahre man damit, wie zuvor, und füge das neue Integral dem vorhergehenden bey. Diese Operation wiederhole man bis kein Rest mehr bleibt, welches geschehen wird, wenn die gegebene Function integrabel ist.

Z. E. Es soll $3x^2ydx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx$ integrirt werden. Man nehme die Glieder, worinn dx vorkommt, nämlich $3x^2ydx + y^5dx$, und integrire sie, als ob nur x eine veränderliche, y aber eine beständige Größe wäre: so erhält man $x^3y + y^5x$, wovon das Differential $x^3dy + 3yx^2dx + y^5dx + 5xy^4dy$, von der gegebenen Function subtrahirt, keinen Rest läßt. Demnach ist $\int(3x^2ydx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx) = x^3y + y^5x$.

Eben so, wenn man $x^3dy + 3x^2ydx + x^3dz + 2xzdx + xdx + y^2dy$, integriren solte, integrire man zuerst alle

alle Glieder, worinn dx befindlich, nämlich $3x^2ydx + 2xzdx + xdx$, als ob nur x veränderlich wäre: so erhält man $x^3y + x^2z + \frac{1}{2}x^2$, wovon das Differential $3x^2ydx + x^3dy + 2xzdx + x^2dz + xdx$, von der gegebenen Function subtrahirt, zum Reste y^2dy läßt. Von diesem Reste wird das Integral $\frac{1}{3}y^3$ zu dem bereits gefundnen addirt. Demnach ist $\int(x^3dy + 3x^2ydx + x^2dz + 2xzdx + xdx + y^2dy) = x^3y + x^2z + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3$.

Zusatz. 1. Will man zum voraus wissen, ob dergleichen Differentiale, wenn sie nur zwey veränderliche Größen enthalten, vollständig, und daher integrabel sind: so differentiire man den Coefficienten von dx, als ob nur y veränderlich wäre, und den Coëfficienten von dy als ob nur x veränderlich wäre. Dividirt man die also gefundnen Differentiale, das erste mit dy, das zweyte mit dx, und man findet beyde Quotienten gleich: so ist das gegebene Differential vollständig und integrabel. Z. E. Es soll $\frac{1}{3}y^3dx + xy^2dy$ integrirt werden: so ist $\frac{d(\frac{1}{3}y^3)}{dy} = \frac{d(xy^2)}{dx}$, wenn man beym ersten nur y, beym zweyten nur x als veränderlich annimmt. Denn alsdenn erhält man $\frac{y^2dy}{dy} = \frac{y^2dx}{dx}$. Daher ist die gegebene Differentialfunction vollständig, und giebt zum Integral $\frac{1}{3}y^3x$. Hingegen ist $xydx + 2xdy$ nicht vollständig und daher auch nicht integrabel, weil $\frac{d(xy)}{dy}$ nicht dem $\frac{d(2x)}{dx}$ gleich ist.

2. Bezeichnet man dergleichen Differential von zwey veränderlichen Größen mit $Adx + Bdy$: so ist dasselbe vollständig, wenn auf die vorher beschriebene Art

Digitized by Google

$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$ ist. Ein Differential von drey veränderlichen Größen, $Adx + Bdy + Cdz$, ist auf eben die Art vollständig, wenn $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, und $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, und $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$.

§. 36.

Aufgabe. Binomische Differentialfunctionen zu integriren.

I. Wenn der Coëfficient ein genaues Differential, der veränderlichen Größe im Binomium, enthält: so kann man sogleich nach der Fundamentalregel integriren. Z. E.

1. Es sey $(abdx + 2axdx)(bx + x^2)^{\frac{1}{2}}$ zu integriren: so enthält der Coefficient $a(bdx + 2xdx)$ das genaue Differential von $bx + x^2$, weil $d(bx + x^2) = bdx + 2xdx$. Demnach ist $\int (bx + x^2)^{\frac{1}{2}}(bdx + 2xdx) = \frac{2}{3}a(bx + x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}a(bx + x^2)\sqrt{(bx + x^2)}$.

2. Es sey $3xdx(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ zu integriren: so enthält der Coëfficient $3.xdx$ das genaue Differential von $a^2 + x^2$, welches $2.xdx$ ist, wobey auf den Unterschied der beständigen Größen 3 und 2 nicht zu achten ist. Demnach ist $\int (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}.3xdx = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}3xdx}{\frac{3}{2}.2xdx} = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}2.3xdx}{3.2.xdx} = (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} = (a^2 + x^2)\sqrt{(a^2 + x^2)}$, oder $= \sqrt{(a^2 + x^2)^3}$.

Zusatz. Diese Regel erstreckt sich auch auf gebrochene, auch auf trinomische Functionen, auch auf solche, die mehr als eine veränderliche Größe enthalten. So ist

z. E.

Digitized by Google

z. E. $\int \frac{bdx}{(a^2+bx)^2} = \int bdx\,(a^2+bx)^{-2} = \frac{(a^2+bx)^{-1}}{-1}$
$= \frac{-1}{a^2+bx}$; und $\int (adx+dy)(ax+y)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(ax+y)^{\frac{3}{2}}$
$= \frac{2}{3}\sqrt{(ax+y)^3}$; und $\int (xdy+ydx+2ydy)(xy+y^2+a^2)^{\frac{m}{n}} = \frac{n}{m+n}(xy+y^2+a^2)^{\frac{m+n}{n}}$;
und $\int \frac{2x^2ydy+2y^2xdx+2xdx+2ydy}{\sqrt[3]{(x^2y^2+x^2+y^2)^2}} =$
$\int (2x^2ydy+2y^2xdx+2xdx+2ydy)(x^2y^2+x^2+y^2)^{-\frac{2}{3}}$
$= \frac{1}{3}(x^2y^2+x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$.

II. Wenn der Coëfficient nicht das genaue Differential der veränderlichen Größe im Binomium enthält: so kann man durch Potenziren, Extrahiren, Multipliciren oder Dividiren, und Transformiren die gegebene Function zum Integriren zubereiten.

1. Es sey $(axdx+bx^2dx)(ax+x^2)$ zu integriren: so erhebe man $ax+x^2$ in die zweyte Potenz $a^2x^2+2ax^3+x^4$, und multiplicire solche mit dem Coëfficienten $axdx+bx^2dx$: so erhält man $a^3x^3dx + 2a^2x^4dx + ax^5dx + a^2bx^4dx + 2abx^5dx + bx^6dx$, und durch Integrirung der einzelnen Glieder das gesamte Integral, $\frac{1}{4}a^3x^4 + \frac{2}{5}a^2x^5 + \frac{1}{6}ax^6 + \frac{1}{5}a^2bx^5 + \frac{2}{6}abx^6 + \frac{1}{7}bx^7$.

2. Es sey $3dx(a^2+2ax+x^2)^{-2}$ zu integriren, wo das Trinomium eine vollständige Potenz enthält. In solchem Falle extrahire man daraus die Wurzel, und vermehre den Exponenten des Trinomiums um so viel Grade. Als hier ist die Quadratwurzel $a+x$, und daher $\int 3dx(a^2+2ax+x^2)^{-2} = \int 3dx(a+x)^{-4}$, wo so gar der Coëfficient nunmehr das genaue Differential des Binomiums enthält. Demnach ist $\int 3dx(a+x)^{-4} = \frac{3dx(a+x)^{-3}}{-3dx} = \frac{-1}{(a+x)^3}$.

3. Es sey $(a^2dx + 2x^2dx)(a^2x^4 + x^6)^{\frac{1}{2}}$ zu integriren. Man multiplicire den einen Factor mit einer Potenz von x, und dividire den andern Factor mit eben dieser Potenz, wodurch die Function nicht geändert wird; als hier werde der Coëfficient mit x^1, multiplicirt, und das Binomium mit $x^{\frac{2}{2}} = x^1$ dividirt, daher $\int (a^2dx + 2x^2dx)(a^2x^4 + x^6)^{\frac{1}{2}} = \int (a^2xdx + 2x^3dx)(a^2x^2 + x^4)^{\frac{1}{2}}$, wo nunmehr der Coëfficient das genaue Differential des binomischen Factors enthält. Demnach ist das Integral $\frac{1}{2}(a^2x^2 + x^4)^{\frac{3}{2}}$.

Auf eben die Art ist $\int (3ax^3dx + 4x^4dx)(ax + x^2)^{\frac{1}{2}} = \int (3ax^2dx + 4x^3dx)(ax^3 + x^4)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(ax^3 + x^4)^{\frac{3}{2}}$; und $\int dx(a^2x^2 + x^4)^{\frac{1}{2}} = \int xdx(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}$.

4. Es sey $xdx\sqrt[4]{(a - x)}$ zu integriren. Man setze $\sqrt[4]{(a-x)} = z$, folglich $a - x = z^4$, folglich $a - z^4 = x$, folglich $-4z^3dz = dx$. Demnach ist $xdx = -4az^3dz + 4z^7dz$, und $xdx\sqrt[4]{(a-x)} = -4z^4dz + 4z^8dz$. Folglich ist $\int xdx\sqrt[4]{(a-x)} = -\frac{4}{5}z^5 + \frac{4}{9}z^9$. Nun ist $(a - x)^{\frac{1}{4}} = z$, und daher $(a - x)^{\frac{5}{4}} = z^5$, und $(a - x)^{\frac{9}{4}} = z^9$. Folglich ist $\int xdx\sqrt[4]{(a - x)} = -\frac{4}{5}(a - x)^{\frac{5}{4}} + \frac{4}{9}(a - x)^{\frac{9}{4}} = -\frac{4}{5}\sqrt[4]{(a - x)^5} + \frac{4}{9}\sqrt[4]{(a - x)^9}$.

Auf eben die Art ist, wenn man $(a - x)^{-\frac{1}{4}} = z^{-1}$, folglich $(a - x)^{\frac{1}{4}} = z$, und $a - x = z^4$ setzt, $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{(a - x)}} = \int xdx(a - x)^{-\frac{1}{4}} = \int (-4az^2dz + 4z^6dz) = -\frac{4}{3}az^3 + \frac{4}{7}z^7 = -\frac{4}{3}(a - x)^{\frac{3}{4}} + \frac{4}{7}(a - x)^{\frac{7}{4}}$.

Auf

Auf eben die Art ist, wenn man $(a+x)^{\frac{3}{2}} = z^{\frac{3}{2}}$, folglich $a+x=z$ setzt, $\int x dx (a+x)^{\frac{3}{2}} = \int z^{\frac{5}{2}} dz - az^{\frac{3}{2}} dz = \frac{2}{7}z^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{5}az^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{7}(a+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{5}a(a+x)^{\frac{5}{2}}$.

5. Es sey $bdx\sqrt{(ax^2+x^3)}$ zu integriren. Man multiplicire den Coëfficienten mit x, und dividire den andern Factor mit $x^{\frac{2}{2}} = x$: so ist $bdx\sqrt{(ax^2+x^3)} = bxdx\sqrt{(a+x)}$. Setze man nun $\sqrt{(a+x)} = z^{\frac{1}{2}}$, folglich $a+x=z$, und $x=z-a$: so ist $\int bdx\sqrt{(ax^2+x^3)} = \int(bzdz - abdz)z^{\frac{1}{2}} = \int(bz^{\frac{3}{2}}dz - abz^{\frac{1}{2}}dz) = \frac{2}{5}bz^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}abz^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}b(a+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}ab(a+x)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}b\sqrt{(a+x)^5} - \frac{2}{3}ab\sqrt{(a+x)^3}$.

III. Integrirung der Exponential-Differentiale.

§. 37.

Aufgabe. Ein logarithmisches Differential unmittelbar zu integriren.

Enthält der Zähler des gegebenen Differentials das genaue Differential des Nenners: so ist der Logarithmus des Nenners, mit den etwa vorhandenen beständigen Größen multiplicirt, das gesuchte Integral, §. 18.

So ist z. E. $\int\frac{dy}{y} = \log. y$; und $\int\frac{adx}{x} = a\log. x = \log. x^a$; und $\int\frac{adx}{bx} = \frac{a}{b}\log. x = \log.\sqrt[b]{x^a}$; und $\int\frac{axdx}{bx^2} = \int\frac{adx}{bx} = \frac{a}{b}\log. x = \log.\sqrt[b]{x^a}$; und $\int\frac{2xdx}{a^2+x^2} = \log.(a^2+x^2)$; und $\int\frac{12x^2dx}{a^3+x^3} = \int\frac{4.3x^2dx}{a^3+x^3} = 4\log.$

Digitized by Google

$4 \log.(a^3+x^3) = \log.(a^3+x^3)^4$; und $\int \frac{mx^{n-1}dx}{a^n+x^n} = \int \frac{\frac{m}{n} nx^{n-1}dx}{a^n+x^n} = \frac{m}{n}\log.(a^n+x^n) = \log.\sqrt[n]{(\log.a^n+x^n)^m}$; und $\int \frac{adx-2xdx}{ax-x^2} = \log.(ax-x^2)$.

§. 38.

Aufgabe. Ein logarithmisches Differential durch Hülfe der Substitution zu integriren.

Ist in dem gegebenen Differential ein Factor der Logarithmus einer veränderlichen Größe: so setze man denselben einer veränderlichen Größe gleich, und bringe diesen Werth in die gegebene Function.

1. Es sey $\frac{dx}{x \log x}$ zu integriren. Man setze $\log.x = y$, folglich $\frac{dx}{x} = dy$: so ist $\int \frac{dx}{x \log.x} = \int \frac{dy}{y} = \log.y = \log.(\log.x)$.

2. Es sey $m(\log.x)^{m-1}\frac{dx}{x}$ zu integriren. Man setze $\log.x = y$, folglich $\frac{dx}{x} = dy$: so ist $\int m(\log.x)^{m-1}\frac{dx}{x} = \int my^{m-1}dy = y^m = (\log.x)^m$.

3. Es sey $m(\log.\log.x)^{m-1}\frac{dx}{x \log.x}$ zu integriren. Man setze $\log.x = y$, folglich $\frac{dx}{x} = dy$, und $\log.(\log.x) = \log.y$: so ist $\int m.(\log.\log.x)^{m-1}\frac{dx}{x \log.x} = m(\log.y)^{m-1}\frac{dy}{y} = (\log.y)^m = (\log.\log.x)^m$.

4. Es

4. Es sey $nm(\log. x^m)^{n-1}\frac{dx}{x}$ zu integriren. Man setze $x^m = y$, folglich $mx^{m-1}dx = dy$, und $dx = \frac{dy}{mx^{m-1}}$, und $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x.\,mx^{m-1}} = \frac{dy}{mx^m} = \frac{dy}{my}$: so ist $\int nm(\log. x^m)^{n-1}\frac{dx}{x} = \int nm(\log. y)^{n-1}\frac{dy}{my} = \frac{n}{m}(\log. y)^{n-1}\frac{dy}{y} = (\log. y)^n = (\log. x^m)^n$, wie num. 2.

§. 39.

Aufgabe. Ein Differential, worinn eine veränderliche Größe als Exponent vorkommt, zu integriren.

Da §. 19. das Differential einer Exponentialgröße aus dem Producte der Größe selbst in das Differential ihres Logarithmus bestehet: so findet man ihr Integral, wenn man das gegebene Differential durch das Differential des Logarithmus der Exponentialgröße dividirt.

So ist z. E. $\int a^x dx la = \frac{a^x dx la}{dx la} = a^x$; und $\int a^x dx = \frac{a^x dx}{dx la} = \frac{a^x}{la}$; und $\int \frac{a^x dx}{\log. a} = \frac{a^x dx}{\log. a.\, dx \log. a} = \frac{a^x}{(\log. a)^2}$; und $\int \frac{a^x dx}{(\log. a)^2} = \frac{a^x dx}{(\log. a)^2.\, dx \log. a} = \frac{a^x}{(\log. a)^3}$; und überhaupt $\int \frac{a^x dx}{(\log. a)^n} = \frac{a^x}{(\log. a)^{n+1}}$.

Anmerkung. Die zusammengesetztern Fälle bleiben in den ersten Elementen noch ausgesetzt.

Digitized by Google

IV. Gebrauch der Integrale.

§. 40.

Aufgabe. Die Gleichung für eine Curve aus der Formel für ihre Subtangente oder Subnormale zu finden.

Man setze die gegebene specielle Formel §. 22. der allgemeinen Formel §. 21. gleich, reducire die Gleichung nach den Regeln der Algebra, und integrire beyde Glieder.

1. Es sey die Subtangente einer Curve $= \frac{2y^2}{a}$: so ist §. 21. $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{a}$, folglich $aydx = 2y^2dy$; oder $adx = 2ydy$; folglich integrirt, $ax = y^2$, die Gleichung für die Parabel, deren Parameter a.

2. Es sey die Subtangente einer Curve $= 2x$: so ist §. 21. $\frac{ydx}{dy} = 2x$, folglich $ydx = 2xdy$, folglich $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y}$. Da dieses ein logarithmisches Differential ist, so bringe man die Subtangente der logarithmischen Linie $= a$, in die Gleichung, und man erhält $\frac{dx}{2x} = \frac{ady}{y}$, folglich $\frac{dx}{2ax} = \frac{dy}{y}$, und integrirt, $\log. y = \frac{1}{2} \log. ax = \log. (ax)^{\frac{1}{2}} = \log. \sqrt{ax}$, folglich $y = \sqrt{ax}$, folglich $y^2 = ax$, die Gleichung für die Parabel.

3. Es sey die Subnormale einer Curve $= a$: so ist §. 21. $\frac{ydy}{dx} = a$, folglich $ydy = adx$, und integrirt, $\frac{y^2}{2} = ax$, folglich $y^2 = 2ax$, die Gleichung für die Parabel, deren Parameter $2a$.

4. Es

Digitized by Google

4. Es sey die Subnormale einer Curve $= \frac{ap - 2px}{2a}$: so ist §. 21. $\frac{ydy}{dx} = \frac{ap - 2px}{2a}$, folglich $2aydy = apdx - 2pxdx$, und integrirt, $ay^2 = apx - px^2$, folglich $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, die Gleichung für die Ellipse, deren Parameter p, und große Axe a.

§. 41.

Aufgabe. Eine ebene Figur SAN zu quadriren. Fig. 216.

1. Man ziehe zwey Ordinaten PM, pm, unendlich nahe, und denke sich die ganze Figur aus solchen kleinen Schnitten, wie PpmM, welches das Differential von APM, oder von CPMD ist, zusammengesetzt.

2. Man suche einen Ausdruck für solches Differential PpmM, als eine allgemeine Formel für das Differential einer jeden ebenen Figur. Nämlich da AP = x, PM = y, und daher pm = y + dy, auch Pp = dx ist: so ist das kleine Trapez $PpmM = \frac{y + y + dy}{2}.dx = ydx + \frac{dy.dx}{2}$. Nun verschwindet hier $\frac{dydx}{2}$ gegen ydx. Folglich ist die allgemeine Formel für das Differential einer jeden ebenen Figur ydx.

3. Ist nun eine Gleichung für eine bestimmte Curve gegeben: so suche man daraus den Werth von y oder von dx, und bringe solchen in die allgemeine Formel num. 2. anstatt y oder anstatt dx, und integrire alsdenn dieselbe.

4. Da das gefundne Integral noch unbestimmt ist, und so wohl die Fläche APM, als auch die Fläche CPMD vorstellen kann; so füge man solchem eine beständige Größe C bey, welche bestimmt, von welchem Punkte A oder C

u. s.

Digitized by Google

u. s. w. die zu quadrirende Fläche ausgehen soll. Denn nimmt man den Punkt A für den Anfang an: so ist $x=o$, und alsdenn das gefundne Integral $= o$; aus welcher Gleichung man den Werth für C erhält. Nimmt man den Punkt C für den Anfang an, welcher vom Scheitel um $AC = b$ entfernt ist: so wird $x = b$, und der unbestimmte Raum CPMD, für welchen man das Integral gefunden hat, verschwindet. Setzt man daher in dem gefundnen Integral $x = b$: so wird solches $= o$, aus welcher Gleichung man abermals den Werth für C erhält.

Es sey z. E. die Gleichung für die Parabel $y^2 = px$ gegeben: so ist $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$. Setzt man diesen Werth in die allgemeine Formel ydx num. 2. anstatt y: so erhält man $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$, und integrirt, $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$. Nimmt man nun A für den Anfang an: so ist $APM = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$. Setzt man hier $x = o$, so verschwindet APM, so daß $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}}. o + C = o$, folglich $C = -\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}}. o = o$ wird; woraus erhellet, daß für APM keine Constante, oder beständige Größe, hinzuzufügen ist. Nimmt man hingegen C für den Anfang an, so daß $AC = x = b$ sey: so ist alsdenn $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + C = CPMD = o$, folglich $C = -\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}}$; woraus erhellet, daß dieser Werth für die Constante noch hinzuzufügen ist. Demnach ist $CPMD = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}$.

Zusatz. 1. Da $APM = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}. \frac{2}{3} x$, und $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$ ist: so ist $APM = \frac{2}{3} xy = \frac{2}{3} AP. PM. = \frac{2}{3} BP$.

2. Da $CPMD = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}$ ist: so ist auf eben die Art $CPMD = \frac{2}{3} AP. PM - \frac{2}{3} AC. CD = \frac{2}{3} BP - \frac{2}{3} EC$.

§. 42.

Digitized by Google

§. 42.

Aufgabe. Die Gleichung für eine Curve aus der Formel für ihren Flächen-Inhalt zu finden.

Man differentiire die gegebene specielle Formel und setze ihr Differential der allgemeinen Formel des Flächen-differentials ydx §. 41. num. 2. gleich, reducire solche Gleichung gehörig, und integrire ihre beyden Glieder.

Es sey z. E. ein Flächen-Inhalt $\frac{2}{3}xy$ gegeben: so ist $\frac{2}{3}xdy + \frac{2}{3}ydx = ydx$, folglich $\frac{2}{3}xdy = \frac{1}{3}ydx$, oder $2xdy = ydx$, folglich $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$. Setzt man die Subtangente der Logistik $= a$: so erhält man $\frac{ady}{y} = \frac{dx}{2x}$ oder $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2ax}$, und integrirt, $\log. y = \frac{1}{2}\log. ax = \log. ax^{\frac{1}{2}} = \log. \sqrt{ax}$, folglich $y = \sqrt{ax}$, und $y^2 = ax$, die Gleichung für die Parabel.

§. 43.

Aufgabe. Eine krumme Linie AMS zu rectificiren. Fig. 216.

Man nehme einen unendlich kleinen Theil Mm, oder das Differential des Bogen AM, oder DM, und ziehe die zugehörigen Ordinaten MP, mp, auch Mr der Pp parallel: so ist $Mr = dx$, $mr = dy$, folglich $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, die allgemeine Formel für das Differential eines Bogens. Sucht man nun aus einer gegebenen Gleichung den Werth für dx oder dy, und bringt solchen in die allgemeine Formel: so giebt das Integral den Bogen AM oder DM in einer geraden Linie, wozu man wie §. 41. noch die Constante bestimmen muß.

Es sey z. E. aus dem allgemeinen Parabolischen Geschlechte $y^{m+n} = a^m x^n$, eine Parabel, deren Gleichung $y^{1+2} = a^1 x^2$, das ist, $y^3 = ax^2$, zu rectificiren: so

Digitized by Google

iſt $\frac{y^3}{a} = x^2$, folglich $\frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} = x$, und differentiirt, $\frac{3}{2}\frac{ydy^2}{a} = dx$. Demnach iſt die allgemeine Formel für das Differential des Bogens, $r(dy^2 + dx^2) = r\left(dy^2 + \frac{9ydy^2}{4a}\right) = dy\, r\left(1 + \frac{9y}{4a}\right) = dy\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$, wovon das Integral $= \frac{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4a}} + C = \frac{8}{27}a\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} + C$.

Will man nun den Bogen von A an, wo $y = 0$ iſt: ſo wird $\frac{8}{27}a \cdot 1^{\frac{3}{2}} + C = 0$, folglich $C = -\frac{8}{27}a$. Demnach iſt $AM = \frac{8}{27}a\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}a$.

§. 44.

Aufgabe. Die Gleichung für eine Curve aus der Formel für ihren rectificirten Bogen zu finden.

Man differentiire die gegebene Formel, ſetze ſolche der allgemeinen Formel für das Differential des Bogens $r(dx^2 + dy^2)$ §. 43. gleich, reducire gehörig ſolche Gleichung, und integrire dieſelbe.

Es ſey z. E. die Formel rx^3 für einen rectificirten Bogen gegeben: ſo iſt das Differential $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx = r(dx^2 + dy^2)$, folglich $\frac{9}{4}xdx^2 = dx^2 + dy^2$, und daher $\frac{9}{4}xdx^2 - dx^2 = dy^2$; folglich $dx\, r(\frac{9}{4}x - 1) = dy$, oder $dx\,(\frac{9}{4}x - 1)^{\frac{1}{2}} = dy$, und integrirt, $\frac{2}{3}(\frac{9}{4}x - 1)^{\frac{3}{2}} = y$, folglich $\frac{4}{9}(\frac{9}{4}x - 1)^3 = y^2$, $-\frac{64}{729}$ oder $(x - \frac{4}{9})^3 = y^2$, das iſt, $x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{16}{27}x - \frac{64}{729} = y^2$, die Gleichung für ſolche Curve.

§. 45.

Digitized by Google

§. 45.

Aufgabe. Eine körperliche Figur, welche durch das Umdrehen einer ebenen Figur APM um ihre Axe AP entsteht, zu cubiren. Fig. 216.

1. Man ziehe die Ordinaten PM, pm, unendlich nahe an einander: so wird die Fläche PpmM beym Umdrehen um die Axe Pp einen Cylinder beschreiben, welcher das Differential des Körpers ist, der durch das Umdrehen der Fläche APM um die Axe AP entstehet.

2. Man suche die allgemeine Formel für jedes solches körperliche Differential auf folgende Art. Da obgedachter kleiner Cylinder zur Grundfläche einen Cirkel hat, dessen Halbmesser zwischen PM, pm, oder da solche unendlich nahe, dessen Halbmesser selbst PM oder pm ist: so nehme man hiezu PM = y. Daher ist dessen Peripherie $\frac{py}{r}$, wor: p die Verhältniß des Halbmessers zur Peripherie, anzeigt, und dessen Flächeninnhalt $= \frac{py}{r} \cdot \frac{1}{2}y = \frac{py^2}{2r}$; folglich der körperliche Innhalt des obgedachten kleinen Cylinders $= \frac{py^2}{2r}$. $Pp = \frac{py^2dx}{2r}$, die gesuchte allgemeine Formel.

3. Ist nun eine Gleichung für die sich umdrehende Fläche APM gegeben: so suche man daraus den Werth für y^2, oder dx, bringe solchen in die allgemeine Formel, und integrire.

4. Die Constante bestimme man, wie §. 41.

Es sey z. E. die sich umdrehende Fläche, planum generans, eine Parabel, deren Gleichung $y^2 = ax$: so ist die allgemeine Formel nunmehr $\frac{paxdx}{2r}$, und integrirt, $\frac{pax^2}{4r}$,

Digitized by Google

oder y^2 anstatt ax gesetzt, $\frac{py^2x}{r^2} = \frac{px^2}{2r} \cdot \frac{x}{2}$, wo der erste Factor die circularische Grundfläche des Körpers, und der zweyte seine halbe Höhe anzeigt, so daß also der Körper die Hälfte des mit ihm correspondirenden Cylinders ist. Nimmt man nun A zum Anfangspunkte an: so ist $x = o$, folglich auch die Constante $= o$. Nimmt man C zum Anfangspunkte an, so daß $AC = e$: so wird, wenn $x = e$, das Integral $\frac{ape^2}{4r} + C = o$, folglich $C = -\frac{ape^2}{4r}$, und daher das vollständige Integral $= \frac{apx^2 - ape^2}{4r}$.

Es sey ferner die sich umdrehende Fläche, planum generans, eine Ellipse, deren Gleichung VI. §. 43. $y^2 = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2)$: so ist die allgemeine Formel des körperlichen Differentials nunmehr $\frac{pdx}{2r} \cdot \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2) = \frac{pc^2}{2ra^2}(axdx - x^2dx)$, und integrirt, $\frac{pc^2}{2ra^2}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$ wobey die Constante $= o$ ist, wenn man A zum Anfangspunkte nimmt. Will man den ganzen Körper: so setze man in dem Integral a anstatt x, und man erhält $\frac{pc^2}{2ra^2}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{pac^2}{12r} = \frac{pc^2}{4r} \cdot \frac{1}{3}a = \frac{pc^2}{8r} \cdot \frac{2}{3}a$, wo der erste Factor die Cirkelfläche des Körpers, welche c zum Halbmesser hat, der andre $\frac{2}{3}$ seiner Höhe anzeigt, so daß also der Körper $\frac{2}{3}$ des mit ihm correspondirenden Cylinders ist. Da nun VI. §. 43. Zus. der Cirkel eine Ellipse, worinn $c = a$, ist: so gilt ein Gleiches von der Sphäre. Nimmt man C

für

für den Anfangspunkt, so daß AC = c, so kann man auf eben die Art, wie beym vorhergehenden Beyspiele, die Constante bestimmen, und darnach den Abschnitt eines elliptischen Sphäroide berechnen, welcher zwischen zwey Durchschnitten, die um x — c von einander abstehen, enthalten ist.

Es sey weiter die sich umdrehende Fläche, planum generans, ein rechtwinklichter Triangel, TPM, der also einen geraden Kegel beschreibt. Nun sey TA = x, AE = y, TP = a, PM = b: so ist a : b = x : y, folglich $y = \frac{bx}{a}$, und daher $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$, folglich die allgemeine Formel nunmehr $\frac{\pi b^2x^2dx}{2a^2r}$, und integrirt, $\frac{\pi b^2x^3}{6a^2r}$. Setzt man x = a, so ist der ganze Kegel $\frac{\pi b^2a}{6r} = \frac{\pi b^2}{2r}$, das, wo der erste Factor die Grundfläche, der zweyte $\frac{1}{3}$ der Höhe ist.

Zusatz. Will man Körper berechnen, die nicht durch Umdrehung einer Fläche entstehen, z. E. eine Pyramide ABFEC Fig. 165. so denke man sich parallele Schnitte, wie GLKH, deren Höhe unendlich klein ist. Nun sey AM = x, folglich die Höhe des Schnitts = dx, AN = z, BFEC = b^2: so ist $a^2 : x^2 = b^2 :$ GLKH, und daher GLKH = $\frac{b^2x^2}{a^2}$, folglich das körperliche Differentiel $\frac{b^2x^2dx}{a^2}$; und integrirt, $\frac{b^2x^3}{3a^2} = \frac{b^2x^2}{a^2} \cdot \frac{x}{3} =$ GLKH. $\frac{1}{3}$ AM.

§. 46.

Aufgabe. Die krumme Oberfläche eines Körpers, der durch Umdrehung einer ebenen Figur APM um ihre Axe AP entstehet, zu quadriren. Fig. 216.

Digitized by Google

1. Der unendlich kleine Bogen Mm, beschreibt beym Umdrehen eine ringförmige Zone, deren Grundlinie die Peripherie eines Cirkels, dessen Halbmesser PM = y, und deren Höhe der unendlich kleine Bogen $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ist. Nun ist, wenn r : p die Verhältniß des Halbmessers zur Peripherie anzeigt, $r : p = y : \frac{py}{r}$. Folglich ist das Differential der krummen Oberfläche $= \frac{py}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

2. Ist nun eine Gleichung für das planum generans gegeben: so bestimme man daraus den Werth für dx, oder für y und dy, setze solchen Werth in die allgemeine Formel, und suche dafür das Integral.

Es sey z. E. das planum generans eine Parabel, deren Gleichung $y^2 = ax$. Folglich ist $2ydy = adx$, und $\frac{2ydy}{a} = dx$, folglich $\frac{4y^2dy^2}{a^2} = dx^2$. Demnach ist die allgemeine Formel nunmehr $\frac{py}{r}\sqrt{\left(\frac{4y^2dy^2}{a^2} + dy^2\right)} = \frac{py}{r}\sqrt{dy^2\left(\frac{4y^2}{a^2} + 1\right)} = \frac{pydy}{r}\cdot\left(1 + \frac{4y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Hiervon ist das Integral $\frac{pydy}{r}\left(1 + \frac{4y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} ; \frac{\frac{1}{2}\cdot 8ydy}{a^2} = \frac{a^2pydy.\left(1 + \frac{4y^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r.\ 12aydy} = \frac{a^2p\left(1 + \frac{4y^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{12r} + C$.

Nimmt man hier den Anfangspunkt A, so wird y = o, folglich $\frac{a^2p}{12r} + C = o$, folglich $C = \frac{-a^2p}{12r}$. Demnach ist die ganze unbestimmte Oberfläche $= \frac{a^2p}{12r}\left(1 + \frac{4y^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2p}{12r}$.

§. 47.

§. 47.

Aufgabe. Eine Ebene drehet sich um ihre Axe und erzeugt einen Körper; man soll aus dem Inhalt dieses Körpers die Gleichung für solche Ebene finden.

Man differentiire den gegebenen Inhalt, setze das Resultat der allgemeinen Formel §. 45. gleich, und reducire die Gleichung.

Es sey z. E. $\frac{apx^2}{4r}$ gegeben; so ist das Differential $\frac{apxdx}{2r} = \frac{py^2dx}{2r}$, folglich $ax = y^2$, die Gleichung für die Parabel.

Ende des ersten Theils.

Digitized by Google

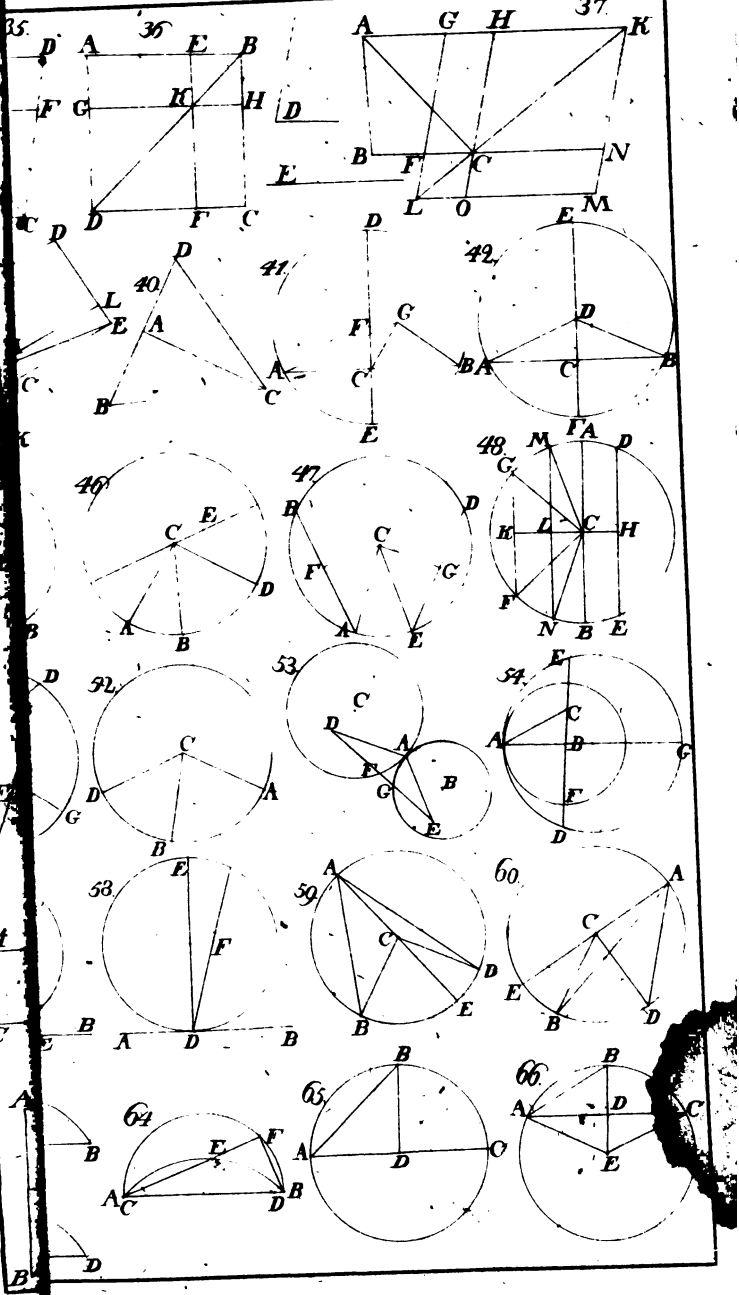
Verbesserungen.

S. 5 Z. 5 nach heißt setze 5, S. 6 §. 10 Z. 7 statt die setze sie, S. 12 §. 28 Z. 4 statt sie in setze sie nach, S. 22 §. 53 Z. 1 statt dividiren setze multipliciren oder dividiren, Z. 3 statt umgekehrt setze oder dividirt, S. 34 §. 87 Z. 17 statt $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$, S. 35 §. 91 Z. 6 statt $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$ setze $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7}$, S. 34 §. 4 Z. 5 statt setze $\frac{ad}{bc}$, S. 50 §. 16 Z. 7 statt einzeln setze einzelnen, S. 51 §. 20 Z. 2 statt einander setze einander, S. 71 Z. 4 statt 10, 100 setze 10, 100, 1000, S. 88 Z. 13 statt 135 setze 35, Z. 14 u. 20 statt Geld setze Gold, S. 93 §. 92 Z. 9 statt d + 6d setze a + 6d, S. 96 Z. 1 statt nach allgemeiner setze noch allgemeinere, S. 98 §. 100 Z. 11 statt $a^n \cdot m^{n-1}$ setze $a \cdot m^{n-1}$, S. 115 Z. 1 statt γ setze r, S. 117 §. 126 Z. 8 statt Waren setze Wären, S. 120 Z. 20. statt Tontin setze Tonti, S. 131 Z. 5 nach ihre setze den, S. 132 §. 17 Z. 5 nach die setze den, S. 137 Z. 1 statt CB setze AB, §. 31 Z. 7 nach ihre setze den, S. 139 §. 35 Z. 7 statt FE setze FA, S. 141 §. 38 Z. 8 nach ihre setze den, S. 145 §. 46 Z. 3 statt CBA setze BAC, S. 155 §. 69. Z. 4 statt 24. setze 42. S. 157 §. 73 Z. 18 statt AH + KC setze AK + KC, S. 160 §. 79 Z. 12 statt < setze >, S. 162 §. 84 Z. 13 statt Halb setze Durch, S. 179 Z. 18 statt AD setze AB, S. 186 §. 134 Z. 3 nach theilen setze Fig. 113. S. 200 Z. 2 statt KL setze KC, S. 218 Z. 8 nach AB : OT setze =, S. 231 Z. 20 statt Nunney setze Nunnez, S. 232, §. 73. 1 statt in setze ist. S. 238 §. 18 Z. 15 statt zwölfseitigen setze zwölfseitigen, S. 240 Z 16 statt $\frac{1}{2p}$ setze $\frac{1}{2} \cdot p$, S. 251 §. 38 Z. 16 statt $\rho = ra$ setze $\rho^2 = ra$, S. 255 Z. 14 statt CEF setze CEP, S. 268 §. 61 Z. 7 statt ADLR setze BDLF, S. 272 §. 63 Z. 6 statt Kf setze KL, §. 64 Z. 1 vor Triangel setze sphärischen, S. 275 §. 66 Z. 1 statt Lehrsatz setze Lehnsatz, S. 293 §. 6 Z. 12 statt Zahl setze Größe S. 310 §. 26 Z. 4 statt 5 setze s S. 313 §. 28 Z. 19 statt oder setze aber, S. 332 Z. 2 statt $\frac{-a \mp r5}{2}$ setze $\frac{-a \mp a r5}{2}$, S. 339 §. 21 Z. 3 statt Diameter setze oder der Diameter, S. 341 §. 23 Z. 8 statt AP setze AB, S. 342 Z. 3 statt AB setze AP, Z. 21 statt GM setze Gm, S. 343 §. 25 Z. 19 statt Schritte setze Schnitte, S. 349 Z. 27 statt CB setze CP, S. 361 §. 58 Z. 3 statt einen Triangel setze Triangel, S. 365 Z. 14 statt veränderliche setze veränderlichen, S. 380 Z. 4 statt $-\max^{m-1} dx$ setze $-\max^{-m-1} dx$,

S. 380 Z. 5 statt $-\frac{m}{n} x^{\frac{-m-n}{n}} dx = \frac{-madx}{r x^{m+n}}$ setze

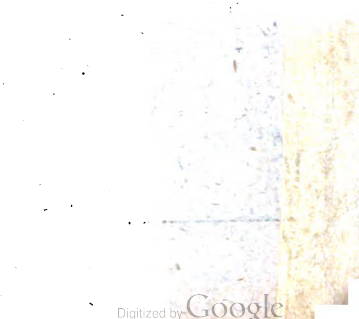
$$-\frac{m}{n} a x^{\frac{-m-n}{n}} dx = \frac{-madx}{n r x^{m+n}}.$$

Digitized by Google



Digitized by Google

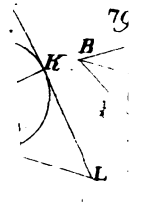
Digitized by Google

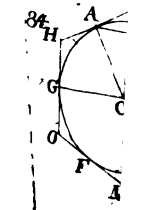


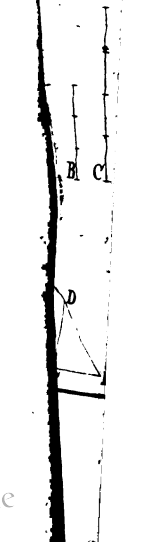
Digitized by Google

Digitized by Google

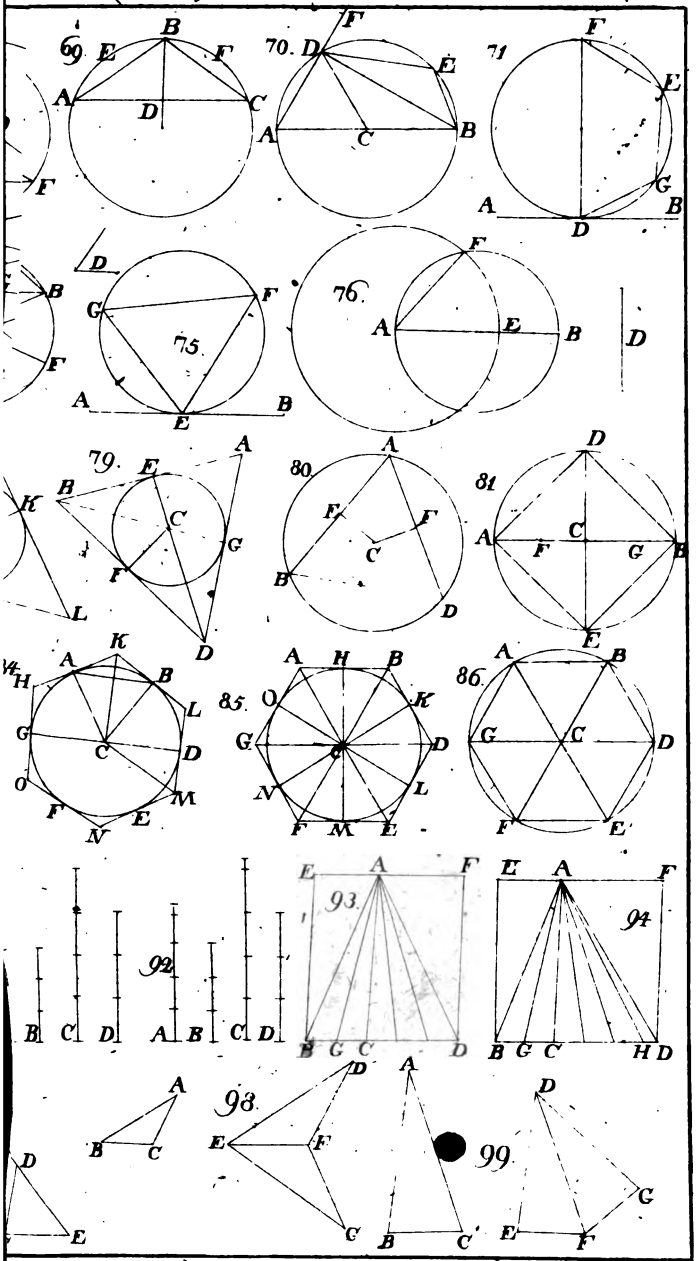
Digitized by Google







Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

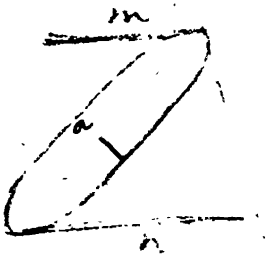
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



$$\frac{mn}{a} = \mu$$

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

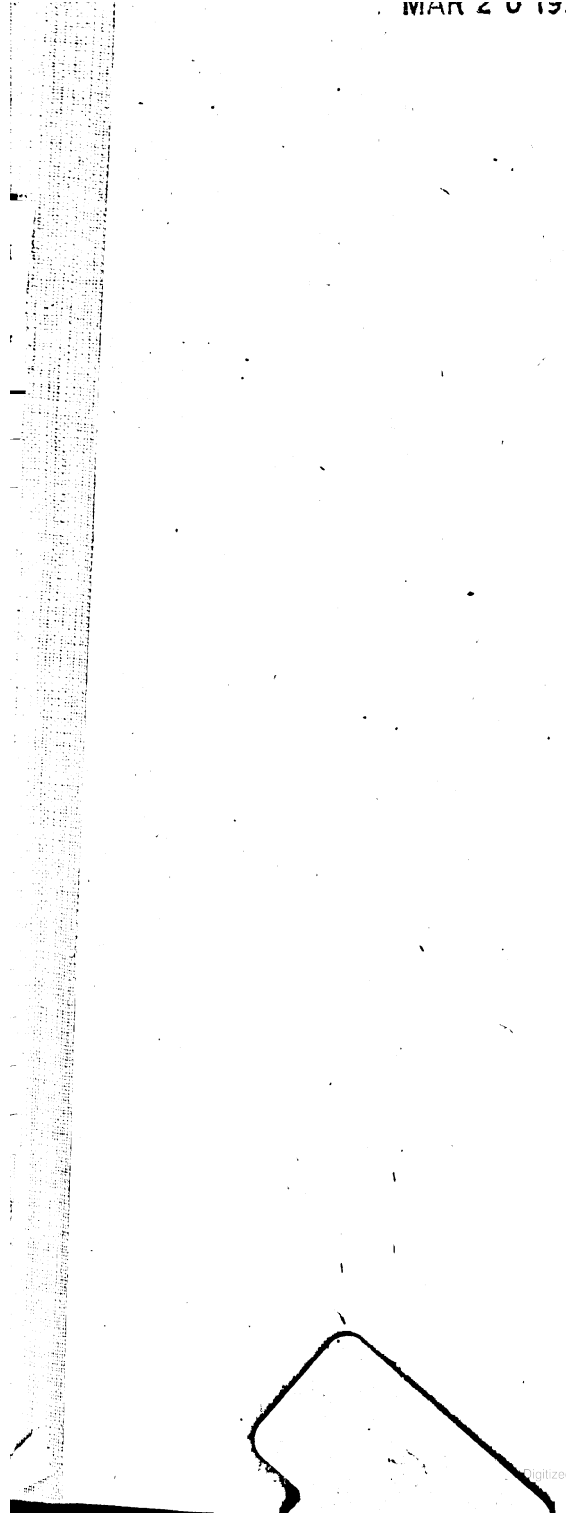
THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building

form 410

Digitized by Google

MAR 2 0 1922



Digitized by Google

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building

form

Digitized by Google